1 有限測度,確率測度

確 率 解 析 学

2011 年 4 月

§1　有限測度，確率測度

定義 1.1

Ω を空でない集合とし, $\mathcal{A}$ をその部分集合族とする. $\mathcal{A}$ が次の 3 条件を満たすとき, (Ω 上の) **加法族**という.

(1.1)　$\Omega \in \mathcal{A}$.

(1.2)　$A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

(1.3)　$A_n \in \mathcal{A}\ (n = 1, 2, \cdots, k) \Longrightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{k} A_n \in \mathcal{A}$.

定義 1.2

Ω を空でない集合とし, $\mathcal{F}$ をその部分集合族とする. $\mathcal{F}$ が次の 3 条件を満たすとき, (Ω 上の) **σ-加法族**という.

(1.1)　$\Omega \in \mathcal{F}$.

(1.2)　$A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$.

(1.4)　$A_n \in \mathcal{F}\ (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

注意 1.3

(i)　**σ-加法族**は**加法族**である.

(ii)　**加法族**は **σ-加法族**とは限らない.

例 1.4 (1) 次の集合族は σ-加法族である.
(i) $\mathcal{F} = \{\emptyset,\ \Omega\}$.
(ii) $\mathcal{F} = \{\emptyset,\ E,\ E^c,\ \Omega\}$, ただし $E \subset \Omega,\ \emptyset \neq E \neq \Omega$.
(iii) $\mathcal{F} = \{E : E \subset \Omega\}$.
(2) 次の集合族は加法族ではない.

$$\mathcal{F} = \{\emptyset,\ E,\ \Omega\}, \quad \text{ただし } E \subset \Omega,\ \emptyset \neq E \neq \Omega.$$

定義 1.5

$\Omega\ (\neq \emptyset)$ に σ-加法族 $\mathcal{F}$ が定められているとき, 組 $(\Omega,\ \mathcal{F})$ を**可測空間**という. また, $\mathcal{F}$ の要素となる Ω の部分集合を **$\mathcal{F}$-可測集合**という.

命題 1.6

$(\Omega,\ \mathcal{F})$ を可測空間とし, $A_n \in \mathcal{F}\ (n \in \mathbb{N})$ とする. このとき次の集合はすべて $\mathcal{F}$ に属する.

$$\emptyset, \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k\ (n \in \mathbb{N}), \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k\ (n \in \mathbb{N}), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

定理 1.7

Ω を空でない集合, $\mathcal{A}$ を Ω の部分集合族とする. このとき $\mathcal{A}$ を含む最小の σ-加法族が存在する.

定義 1.8

定理 1.7 の σ-加法族を, $\mathcal{A}$ **により生成される σ-加法族**と呼び, $\sigma(\mathcal{A})$ で表す.

例 1.9 $\Omega = \mathbb{R}^n$ (n 次元ユークリッド空間) とし, $\mathcal{O}$ を開集合の全体, $\mathcal{C}$ を閉集合の全体, $\mathcal{I}$ を左半開区間の全体 とする. このとき $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{I})$ である. この σ-加法族を n **次元ボレル集合族**と呼び $\mathbf{B}_n$ で表す. 更に

$$\mathcal{E} = \{(-\infty, r_1] \times (-\infty, r_2] \times \cdots (-\infty, r_n] : r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n \in \mathbb{Q}\}$$

とおくと $\sigma(\mathcal{E}) = \mathbf{B}_n$ が成り立つ. 但し, $\mathbb{Q}$ は有理数の全体を表す.

定義 1.10

$(\Omega_i,\ \mathcal{F}_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$ を可測空間とし,

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n,$$
$$\mathcal{A} = \{E : E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n,\ E_i \in \mathcal{F}_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)\},$$

とおく. $\sigma(\mathcal{A})$ を $\mathcal{F}_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ の**直積 σ-加法族**といい, $(\Omega,\ \sigma(\mathcal{A}))$ を $(\Omega_i,\ \mathcal{F}_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$ の**直積可測空間**という.

例 1.11 $\Omega_i = \mathbb{R},\ \mathcal{F}_i = \mathbf{B}_1,\ i = 1, 2, \cdots, n$ とおく. $(\Omega_i,\ \mathcal{F}_i),\ i = 1, 2, \cdots, n$ の直積可測空間は $(\mathbb{R}^n,\ \mathbf{B}_n)$ である.

定義 1.12

$(\Omega,\ \mathcal{F})$ を可測空間とする．$\mathcal{F}$ 上で定義された μ が次の 3 条件を満たすとき, $(\Omega,\ \mathcal{F})$ 上の (簡単に Ω 上の, または $\mathcal{F}$ 上の) **有限測度**という.

(1.5) $\quad 0 \leq \mu(A) < \infty$ for $\forall A \in \mathcal{F}$.

(1.6) $\quad A_n \in \mathcal{F}\ (n \in \mathbb{N}),\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

定義 1.13

可測空間 $(\Omega,\ \mathcal{F})$ に有限測度 μ が定義されているとき, 組 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mu)$ を**有限測度空間**という.

可測空間 $(\Omega,\ \mathcal{F})$ で定義された有限測度 P で $P(\Omega) = 1$ を満たすものを確率という．即ち

定義 1.14

$(\Omega,\ \mathcal{F})$ を可測空間とする．$\mathcal{F}$ 上で定義された P が次の 3 条件を満たすとき, $(\Omega,\ \mathcal{F})$ 上の (簡単に Ω 上の, または $\mathcal{F}$ 上の) **確率**または**確率測度**という.

(1.7) $\quad 0 \leq P(A) \leq 1$ for $\forall A \in \mathcal{F}$.

(1.8) $\quad P(\Omega) = 1$.

(1.9) $\quad A_n \in \mathcal{F}\ (n \in \mathbb{N}),\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \Longrightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

定義 1.15

可測空間 $(\Omega,\ \mathcal{F})$ に確率 P が定義されているとき, 組 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ を**確率空間**という.

以下「確率解析学」の講義では，確率空間を基礎とする解析学について勉強する

命題 1.16

$(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mu)$ を有限測度空間とする．このとき以下の性質が成り立つ．

(1.10)　$\mu(\emptyset) = 0$.

(1.11)　$A_i \in \mathcal{F}\ (i = 1, 2, \cdots, n),\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

(1.12) (単調性)　$A,\, B \in \mathcal{F},\ A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

(1.13) (劣加法性)　$A_n \in \mathcal{F}\ (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

(1.14)　$A_n \in \mathcal{F}\ (n \in \mathbb{N}),\ A_1 \subset A_2 \subset \cdots \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

(1.15)　$A_n \in \mathcal{F}\ (n \in \mathbb{N}),\ A_1 \supset A_2 \supset \cdots \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

定理 1.17 (カラテオドリの拡張定理)

$\mathcal{A}$ を Ω の加法族とし, ν を $\mathcal{A}$ 上で定義された関数で次の 3 条件を満たすものとする．

(1.16)　$0 \leq \nu(A) < \infty$ for $\forall A \in \mathcal{A}$.

(1.17)　$\left.\begin{array}{l} A_n \in \mathcal{A}\ (n = 1, 2, \cdots, k) \\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \end{array}\right\} \Longrightarrow \nu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \nu(A_n)$.

(1.18)　$\left.\begin{array}{l} A_n \in \mathcal{A}\ (n = 1, 2, \cdots) \\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \end{array}\right\} \Longrightarrow \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$.

このとき ν は $\sigma(\mathcal{A})$ 上の有限測度に一意的に拡張できる．即ち, 次の条件を満たす $(\Omega,\ \sigma(\mathcal{A}))$ 上の有限測度 μ が唯一つ存在する．

(1.19)　$\mu(A) = \nu(A)$　for $\forall A \in \mathcal{A}$.