# 2 確率空間の例

## §2　確率空間の例

以下の各例において $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ は確率空間である．但し，例 2.1〜例 2.4 においては，

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} = \{E : E \subset \Omega\}, \\ &P(E) = \sum_{k \in E} P(\{k\}), \quad E \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

とする．何故「○○分布」という名前で呼ぶかという理由は，次節以降で説明する．

$\boxed{\textbf{例 2.1}}$　(**ベルヌーイ分布**)　$\Omega = \{0, 1\}$ とし，

$$P(\{0\}) = p, \qquad P(\{1\}) = q,$$

とおく．但し $0 \leq p \leq 1,\ p + q = 1,$ を満たすものとする．

$\boxed{\textbf{例 2.2}}$　(**２項分布 B(n,p)**)　$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ とし，

$$P(\{k\}) = {}_nC_k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n,$$

とおく．但し $0 \leq p \leq 1,\ p + q = 1,$ を満たすものとする．

$\boxed{\textbf{例 2.3}}$　(**幾何分布 G(p)**)　$\Omega = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}$ とし，

$$P(\{k\}) = pq^k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots,$$

とおく．但し $0 \leq p \leq 1,\ p + q = 1,$ を満たすものとする．

$\boxed{\textbf{例 2.4}}$　(**ポアソン分布 P(λ)**)　$\Omega = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}$ とし，

$$P(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k\,!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots,$$

とおく．但し $\lambda > 0$ を満たすものとする．

$\boxed{\textbf{例 2.5}}$　(**一様分布 U([a, b])**)　$-\infty < a < b < \infty$ とし，$\Omega = [a, b]$, $\mathcal{F} = \{E \subset \Omega : E \in \mathbf{B}_1\}$,

$$P(E) = \int_E \frac{1}{b - a}\, dx, \quad E \in \mathcal{F},$$

とおく．

$\boxed{\textbf{例 2.6}}$　(**指数分布 Exp(λ)**)　$\Omega = (0, \infty)$, $\mathcal{F} = \{E \subset \Omega : E \in \mathbf{B}_1\}$,

$$P(E) = \int_E \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}\, dx, \quad E \in \mathcal{F},$$

とおく．但し $\lambda > 0$ を満たすものとする．

$\boxed{\textbf{例 2.7}}$ (**正規分布 $\mathbf{N}(\mu, \sigma)$**) $\Omega = \mathbb{R}^1$, $\mathcal{F} = \mathbf{B}_1$,

$$P(E) = \int_E \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx, \quad E \in \mathcal{F},$$

とおく．但し $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, を満たすものとする.

$\boxed{\textbf{例 2.8}}$ (**n 次元正規分布 $\mathbf{N}(\mathbf{m}, \mathbf{v})$**) $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \mathbf{B}_n$,

$$P(E) = \int_E (2\pi)^{-n/2} (\det q)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - m_i) q_{ij} (x_j - m_j) \right\} dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \quad E \in \mathcal{F},$$

とおく．但し $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \cdots, m_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}$ は $n \times n$ 対称な狭義正定符号行列であり，$\mathbf{q} = (q_{ij}) = \mathbf{v}^{-1}$ を満たすものとする.

$\boxed{\textbf{例 2.9}}$ (**コーシー分布**) $\Omega = \mathbb{R}^1$, $\mathcal{F} = \mathbf{B}_1$,

$$P(E) = \int_E \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}\,dx, \quad E \in \mathcal{F},$$

とおく.