5 積分の定義

§5　積分の定義

この節を通して，X を有限測度空間 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mu)$ 上で定義された可測関数とする．この節で，可測関数 X の有限測度 μ による積分を定義する．

定義 5.1 (階段関数の積分の定義)

X が階段関数の場合, 即ち,

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j I_{A_j}(\omega), \quad \alpha_j \in \mathbb{R},\ A_j \in \mathcal{F},\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j),$$

と表されている場合, X の μ による積分 を

$$\int_\Omega X(\omega)\, \mu(d\omega) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A_j) \tag{5.1}$$

で定義する．

注意 5.2　$\int_\Omega X(\omega)\, \mu(d\omega)$ の値は X の表現の仕方に依らない．

命題 5.3

X, Y が階段関数のとき, 次の性質が成り立つ．

(5.2)　$X(\omega) \leq Y(\omega),\ \omega \in \Omega \Longrightarrow \int_\Omega X(\omega)\, \mu(d\omega) \leq \int_\Omega Y(\omega)\, \mu(d\omega).$

(5.3)　$\forall a, b \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\int_\Omega \{aX(\omega) + bY(\omega)\}\, \mu(d\omega) = a \int_\Omega X(\omega)\, \mu(d\omega) + b \int_\Omega Y(\omega)\, \mu(d\omega).$$

定義 5.4 (非負値可測関数の積分の定義)

X が非負値可測関数の場合, 定理 3.9 により, 次のような階段関数の列 $\{X_n\}$ が存在する．

(5.4)　$0 \leq X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq X_3(\omega) \leq \cdots \leq X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega) \leq \cdots, \quad \omega \in \Omega,$

(5.5)　$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \quad \omega \in \Omega.$

定義 5.1 により，階段関数 X_n の μ による積分 $\int_\Omega X_n(\omega)\, \mu(d\omega)$ が定義できる．X の μ による積分 を

$$\int_\Omega X(\omega)\, \mu(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n(\omega)\, \mu(d\omega) \tag{5.6}$$

で定義する．

$\boxed{\textbf{注意 5.5}}$ (5.6) の右辺の極限値は, $+\infty$ となる場合も含めて, 必ず存在する.

$\boxed{\textbf{注意 5.6}}$ (5.6) の $\displaystyle\int_\Omega X(\omega)\,\mu(d\omega)$ の値は近似列 $\{X_n\}$ の取り方に依らない.

命題 5.7

$X,\ Y$ が非負値可測関数のとき, 次の性質が成り立つ.

$$0 \le X(\omega) \le Y(\omega),\ \omega \in \Omega \Longrightarrow 0 \le \int_\Omega X(\omega)\,\mu(d\omega) \le \int_\Omega Y(\omega)\,\mu(d\omega). \tag{5.7}$$

(5.8) $\forall a,\ b \ge 0$ に対し,

$$\int_\Omega \{aX(\omega) + bY(\omega)\}\,\mu(d\omega) = a\int_\Omega X(\omega)\,\mu(d\omega) + b\int_\Omega Y(\omega)\,\mu(d\omega).$$

定義 5.8 (一般の可測関数の積分の定義)

X が一般の可測関数の場合,

$$X^+(\omega) = \max\{X(\omega),\ 0\}, \quad X^-(\omega) = \max\{-X(\omega),\ 0\},$$

とおく. $X^+,\ X^-$ は非負値可測関数であるから,

$$\int_\Omega X^+(\omega)\,\mu(d\omega), \quad \int_\Omega X^-(\omega)\,\mu(d\omega)$$

が定義 5.4 により定義できる. 上の注意 5.5 で述べたように, $\displaystyle\int_\Omega X^+(\omega)\,\mu(d\omega)$, $\displaystyle\int_\Omega X^-(\omega)\,\mu(d\omega)$ の値は $+\infty$ も含めて必ず存在する. **これらの値のどちらか一方が有限のとき**, <u>X の μ による積分</u>を

$$\int_\Omega X(\omega)\,\mu(d\omega) = \int_\Omega X^+(\omega)\,\mu(d\omega) - \int_\Omega X^-(\omega)\,\mu(d\omega) \tag{5.9}$$

で定義する. $\displaystyle\int_\Omega X^+(\omega)\,\mu(d\omega)$, $\displaystyle\int_\Omega X^-(\omega)\,\mu(d\omega)$ の値が共に有限であるとき, <u>X は可積分関数</u>という.

$\boxed{\textbf{例 5.9}}$ $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \displaystyle\int_\Omega I_A(\omega)\,\mu(d\omega) = \mu(A).$

$\boxed{\textbf{例 5.10}}$ $X = 0 \quad a.e. \Longrightarrow \displaystyle\int_\Omega X(\omega)\,\mu(d\omega) = 0.$

$\boxed{\textbf{参考文献}}$ 伊藤清三著「ルベーグ積分入門」裳華房 §12. 積分の定義と性質