7 確率変数の分布と平均値

§7　確率変数の分布と平均値

定理 7.1

$\mathbf{X}$ を確率空間 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ 上で定義された n 次元確率変数, μ を $\mathbf{X}$ の分布, g を n 次元ボレル関数とする. $E\left[g(\mathbf{X})\right]$ が存在するならば

$$E\left[g(\mathbf{X})\right] = \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x})\,\mu(d\boldsymbol{x}). \tag{7.1}$$

注意　(7.1) の左辺は, 確率変数 $g(\mathbf{X})$ の平均値であり, (7.1) の右辺は, 関数 $g(\boldsymbol{x})$ の測度 μ による積分である.

定義 7.2

確率変数 X に対し,

$E[X^k]$: k 次モーメント,

$E[|X|^k]$: k 次絶対モーメント,

$V(X) = E\left[\{X - E[X]\}^2\right]$: 分散,

$C(X,Y) = E\left[(X - E[X])\,(Y - E[Y])\right]$: X と Y の共分散.

定理 7.1 より次の関係式が得られる.

$$\begin{aligned}
E[X^k] &= \int_{\mathbb{R}} x^k\,\mu(dx),\\
E[|X|^k] &= \int_{\mathbb{R}} |x|^k\,\mu(dx),\\
V(X) &= E\left[\{X - E[X]\}^2\right] = \int_{\mathbb{R}} (x - E[X])^2\ \mu(dx),\\
C(X,Y) &= E\left[(X - E[X])\,(Y - E[Y])\right]\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (x - E[X])\,(y - E[Y])\ \mu_{X,Y}(dxdy).
\end{aligned}$$

但し μ は X の分布であり, $\mu_{X,Y}$ は $X,\ Y$ の結合分布である.

命題 7.3

g を 1 次元ボレル関数とし，$E\,[g(X)]$ が存在すると仮定せよ.
(i) X が 1 次元離散確率変数の場合.
X が有限個 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n の値をとるとき,

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{n} g(a_i)P(X = a_i).$$

X が可算無限個の値 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$ の値をとるとき,

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(a_i)P(X = a_i).$$

(ii) X が 1 次元連続確率変数の場合. $f(x)$ を確率密度関数とする. このとき

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)\,dx.$$

参考文献　西尾真喜子著「確率論」実教出版　第 4 章　平均値

演習問題

(問 7.1)　例 4.12 の確率変数の平均値と分散を求めなさい.

(問 7.2)　例 4.13 の確率変数の平均値と分散を求めなさい.

(問 7.3)　例 4.14 の確率変数の平均値と分散を求めなさい.

(問 7.4)　例 4.15 の確率変数の平均値と分散を求めなさい.

(問 7.5)　例 4.16 の確率変数の平均値と分散を求めなさい.

(問 7.6)　例 4.17 の確率変数の平均値と分散を求めなさい.

(問 7.7)　例 4.18 の確率変数の平均値と分散を求めなさい.

(問 7.8)　例 4.20 の確率変数の平均値は存在しないことを証明しなさい.