

点と線の数学

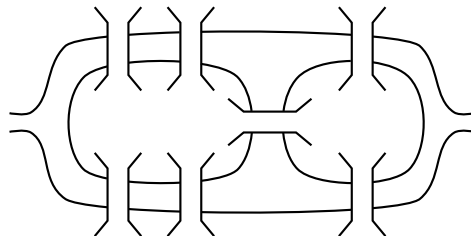
(奈良女子大学研究院自然科学系 片桐民陽)

一筆書き

ケーニヒスベルクの橋渡りの問題

ケーニヒスベルク (Königsberg)

- ・東プロシア (現在のロシア) の町
- ・ドイツ語で「王の町」の意味
- ・哲学者カント (1724 - 1804) が生まれて暮らした町



7つの橋を丁度1回ずつ渡る散歩道を探せ.

1つの方法

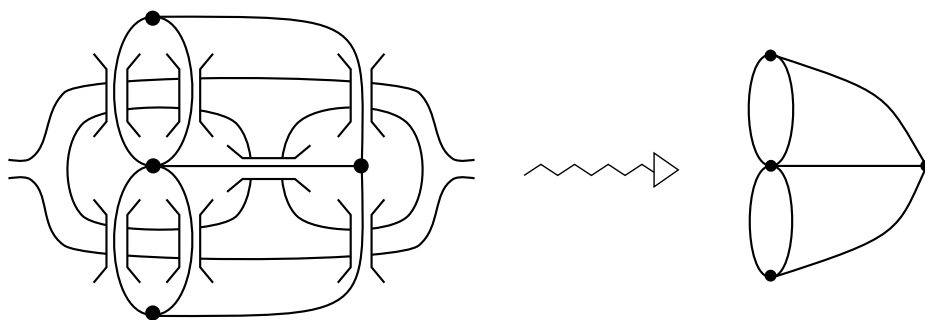
7つの橋を順に渡る通り道の数

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

5040通りの道筋をしらみつぶしに調べればよい.

オイラー (Euler, 1707 - 1783, スイス) の方法

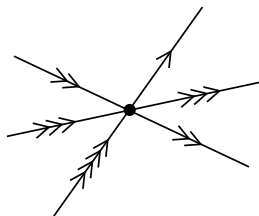
問 以下の図形を一筆書きせよ.



点（頂点）から出ている線（辺）の数をその点の**次数** (degree) と呼ぶ.

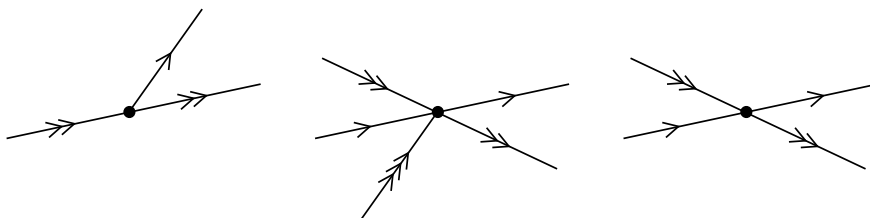
一筆書き可能な図形の性質

(1) 書き始めの点と書き終わりの点と同じとき



すべての点の次数は偶数（次数が奇数の点の数は0）.

(2) 書き始めの点と書き終わりの点が異なるとき

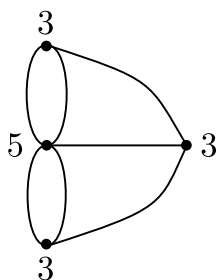


書き始めの点と書き終わりの点の次数は奇数.
通過点の次数は偶数.

定理

図形が一筆書き可能ならば、次数が奇数の点の数は、0 または 2.

ケーニヒスベルクの橋から出来る図形の次数

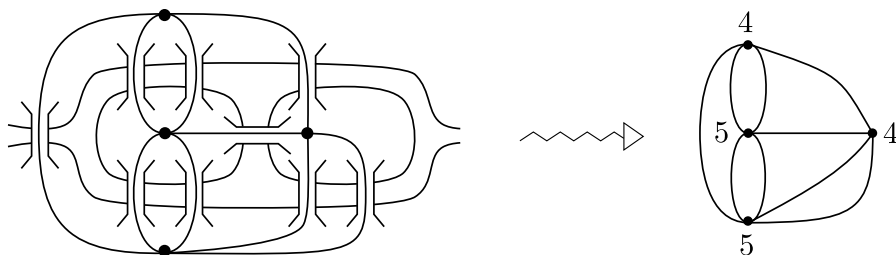


従って、一筆書き出来ない.

注意

上の定理の逆、つまり「次数が奇数の点の数が0 または 2 ならば、一筆書き可能。」が成り立つ.

現在のケーニヒスベルクの橋

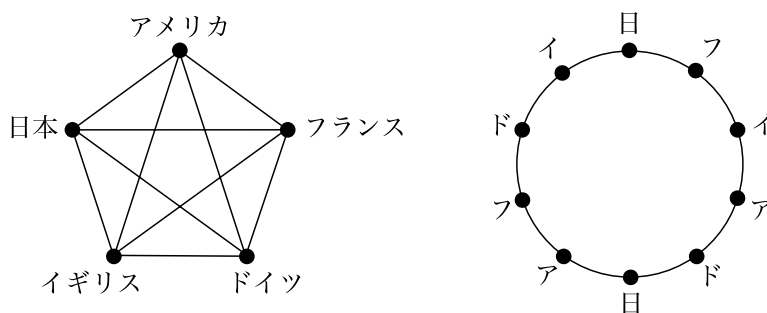


従って、橋渡し出来る。

応用

5つの国際的代表団が、ある晩円卓を囲んで会議を開く。2人のアメリカ人、2人のフランス人、2人のドイツ人、2人のイギリス人、2人の日本人がいる。着席したときに、異なる国籍の組合せの可能なすべてが、隣合わせで実現しなければならない。つまり、アメリカ人とフランス人、ドイツ人と日本人等のすべての対が、隣席としてなければならない。どのように席順を決めればよいだろうか。

それぞれの国を点にする。異なる国籍の組合せをすべて線で結ぶ。この図形の一筆書きを考えれば、異なる国籍の組合せの可能なすべてが、隣合わせで実現出来る。

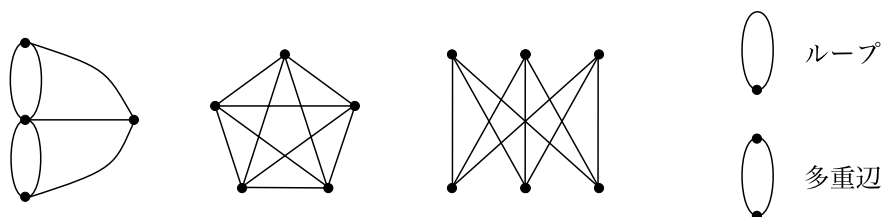


グラフ

定義 (グラフ (graph))

いくつかの頂点 (vertex) とそれらを結ぶ辺 (edge) からなる図形を**グラフ** (graph) と呼ぶ。

例



以降は、**ループ** (loop) や**多重辺** (multiple edges) を持たないグラフのみを考える。

注意

オイラーの散歩道（すべての辺を丁度1回通る散歩道）は解決済み。

ハミルトンの散歩道（すべての頂点を丁度1回通る散歩道）については未解決。頂点 v の次数を $\deg(v)$ とかく。

定理（握手定理）

(1) パーティーが終わったとき、参加者全員に何人と握手したかを尋ねた。全員の握手の回数を足すと、常に偶数になる。

(2) パーティーが終わったとき、参加者全員に何人と握手したかを尋ねた。握手の回数が同じ人が必ずいる。

（証明）

参加者それぞれを頂点とし、握手した人に対応する頂点同士を辺で結ぶとグラフが出来る。

(1) 辺の数を q とすると

$$\sum_{v:\text{頂点}} \deg(v) = 2q.$$

(2) 次数が0の頂点が2個以上あるとき、既に結論はいえている。

頂点の個数を p とする。

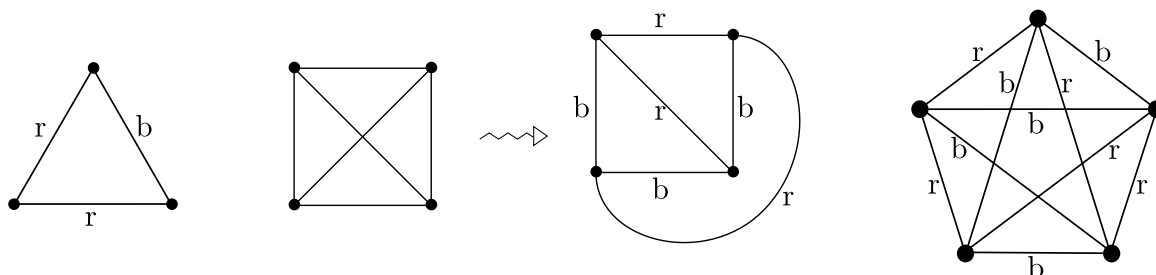
次数が0の頂点が1個のとき、残りの頂点は $p-1$ 個であるから、次数が $p-1$ の頂点はない。従って、 p 個の頂点の次数は、 $0, 1, \dots, p-2$ のいずれかである。鳩の巣原理により次数が同じ頂点がある。

次数が0の頂点がないとき、 p 個の頂点の次数は $1, 2, \dots, p-1$ のいずれかである。鳩の巣原理により、次数が同じ頂点がある。

3人の知り合いか、3人の初対面かの問題

パーティーで、必ず3人が知り合いであるか、3人は初対面かのどちらかになるようにするには、最低何人の人が出席しなければならないか。

答は、3人でも4人でもない。人にグラフの頂点を対応させ、それぞれを1本の辺で結ぶ。知り合い同士ならば、対応する辺を赤で、初対面同士ならば、対応する辺を青で塗る。

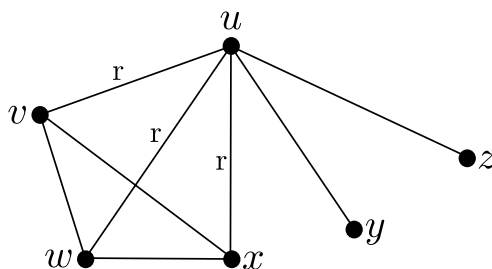


定理

3人の知り合いか, 3人の初対面かの問題の答えは, 6人.

(証明)

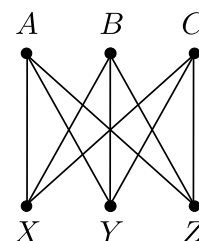
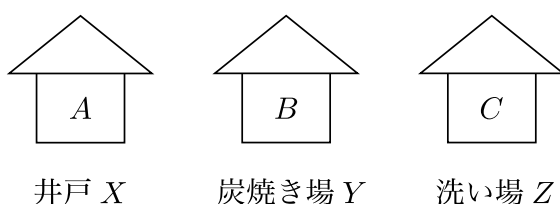
6個の頂点で, すべての頂点が1本の辺で結ばれているグラフを考える. 頂点を u, v, w, x, y, z で表す. 頂点 u に注目する. u から他の頂点と結ぶ5本の辺がある. この5本の辺の内, 少なくとも3本は同じ色にならなければならない. 例えば赤であり, 結ばれている頂点を v, w, x とする. v, w, x 同士の対を結ぶ3本の辺がある. この内, 1本でも赤であれば3人の知り合いがいる. 逆に, v, w, x を結ぶどの辺も青であったとすると, v, w, x の3人が初対面となる.



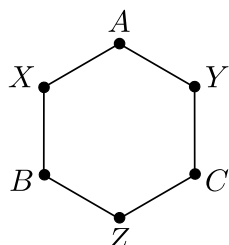
グラフの平面性

山小屋の問題

山の中に3軒の家 A, B, C がある. 3つの施設 (井戸 X , 炭焼き場 Y , 洗い場 Z) があり, これら3軒の家と3つの施設をつなぐ道路を敷きたい. しかし, この3軒は仲が悪いため, 道路は途中で決して交わらないようにしたい. どのように道路を敷いたらよいだろうか.



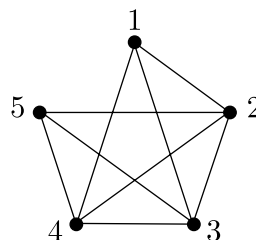
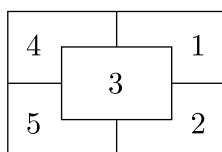
$AXBZCY$ で六角形が出来る. AZ または BY は, この六角形の中と外で結ぶことになる. そうすると, いずれにしても CX を結ぶことが出来なくなる.



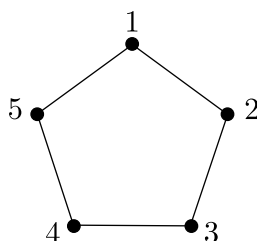
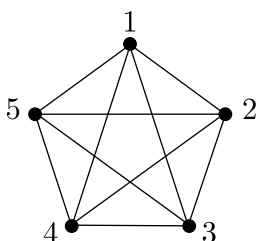
$AZ \quad BY \quad CX \quad ???$

5 人の王子の問題

昔々, ある所に王様が治める国があって, 王様には 5 人の息子がいた. 王様が亡くなるとき, その国は 5 人の息子のために 5 つの領地に分けて, それぞれの領地が他の 4 人の息子と境界線で接するようにすることを望んだ. そんなことが可能だろうか.



これもやはり不可能である.



13, 24, 35, 41, 52

地図の塗分け

4 色予想 (Francis Guthrie, 1852 年)

境界線を共有する隣り合った国は, 異なった色で塗る. 平面 (球面 S^2) 上のどんな地図も 4 色あれば塗分けできるであろう.

各国に色を塗る. 但し, 境界線を共有する国同士は異なる色で塗る. 最低何色必要か.

各国から1つずつ点(頂点)を取り,境界線を共有する国同士から取った頂点同士を線(辺)で結ぶとグラフが出来る.

地図の塗分けの問題は次のように言い換えることが出来る.

グラフの頂点に色を塗る.但し,辺で結ばれている頂点同士は異なる色で塗る.最低何色必要か.(グラフの彩色)

4色問題の解決

- ・4色予想が正しい(すべての平面グラフが4色で彩色できる)ことを証明する.または
- ・4色では彩色できない平面グラフの例を挙げる.

命題

平面(球面 S^2)上のどんなグラフにも次数(頂点とつながっている辺の数)が5以下の頂点が存在する.

(証明)

p, q, r をそれぞれ頂点, 辺, 面の数とする. $V(G)$ を G の頂点全体の集合とする. また, 頂点 v の次数(頂点から出ている辺の数)を $\deg(v)$ とかく.

$$a(G) = \frac{1}{p} \sum_{v \in V(G)} \deg(v)$$

とおく(次数の平均). (これらの記号は以下も用いる.)

$$2q = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = pa(G)$$

つまり $a(G) = \frac{2q}{p}$. また, r_i を i 角形の数とすると

$$2q = 3r_3 + 4r_4 + 5r_5 + \cdots \geq 3(r_3 + r_4 + r_5 + \cdots) = 3r$$

より $r \leq \frac{2}{3}q$. $\chi(S^2) = p - q + r = 2$ (各面が円板と同相なグラフについては必ず成り立つ) より

$$2 = p - q + r \leq p - q + \frac{2}{3}q = p - \frac{1}{3}q$$

より $q \leq 3p - 6$. 従って $a(G) < 6$ を得る.

定理 (6色定理)

平面(球面 S^2)上のどんなグラフも6色で彩色可能.

(証明)

頂点の数に関する数学的帰納法により証明する.

頂点の数が6個以下のとき、明らかに成り立つ。

頂点の数が k 以下のとき成り立つと仮定する。頂点の数が $k+1$ のときを考える。次数が5以下の頂点 v を選び、 v 以外の k 個の頂点を6色で彩色する。 v のまわりでは多くても5色しか使われていないので、残った色で v を彩色すればよい。

1878年、Cayleyがロンドン数学会の会合で4色予想について質問を行い、この問題は数学者の間で知られることとなった。翌年、Kempeが4色予想の「証明」を発表した。1890年、HeawoodはKempeの証明の誤りを示した。

定理 (5色定理, Heawood, 1890年)

平面 (球面 S^2) 上のどんなグラフも5色で彩色可能。

(証明) 頂点の数に関する数学的帰納法により証明する。

頂点の数が5個以下のとき、明らかに成り立つ。

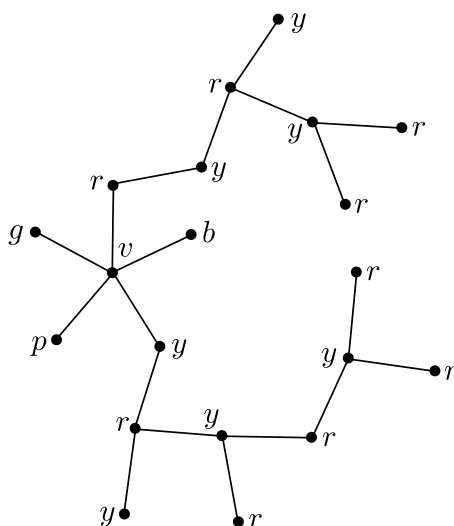
頂点の数が k 以下のとき成り立つと仮定する。頂点の数が $k+1$ のときを考える。次数が5以下の頂点 v を選び、 v 以外の k 個の頂点を5色で彩色する。 v のまわりで5色すべて (r, b, y, p, g) が使われているときだけが問題。 v を始点とする列

$$r \rightarrow y \rightarrow r \rightarrow y \rightarrow r \rightarrow \cdots$$

$$y \rightarrow r \rightarrow y \rightarrow r \rightarrow y \rightarrow \cdots$$

について調べる。

(a)



上の2つの列がつながっていないとき

このとき列

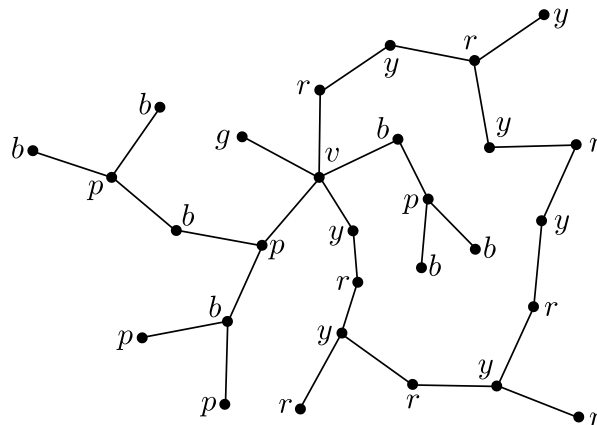
$$r \rightarrow y \rightarrow r \rightarrow y \rightarrow r \rightarrow \cdots$$

を

$$y \rightarrow r \rightarrow y \rightarrow r \rightarrow y \rightarrow \dots$$

に変更する. すると v のまわりでは 4 色しか使われていないので, 余った色で v を彩色すればよい.

(b)



上の 2 つの列がつながっているとき
 v を始点とする列

$$b \rightarrow p \rightarrow b \rightarrow p \rightarrow b \rightarrow \dots$$

$$p \rightarrow b \rightarrow p \rightarrow b \rightarrow p \rightarrow \dots$$

を考える. これらの列はつながっていないので列

$$b \rightarrow p \rightarrow b \rightarrow p \rightarrow b \rightarrow \dots$$

を

$$p \rightarrow b \rightarrow p \rightarrow b \rightarrow p \rightarrow \dots$$

に変更する. すると v のまわりでは 4 色しか使われていないので, 余った色で v を彩色すればよい.

定理 (4 色定理, Appel-Haken, 1976 年)

平面 (球面 S^2) 上のどんなグラフも 4 色で彩色可能.

Appel と Haken は, 当時最速のスーパーコンピュータを 1200 時間使って 4 色定理を証明した.

ちなみに, トーラス (ドーナツの表面) 上のどんなグラフ (地図) も 7 色で塗分けられる.

4 色問題に関するエピソード

・Heawood：時計を1年に1度（クリスマス）にしか合わせない。毎日会議がないとダメ。ダートラム城保存の功績により大英帝国四等勲士になる。

・ゲッティンゲン大学における講義中、Minkowski「この問題は、まだ証明されていないが、その理由は、挑戦したのが三流数学者ばかりであるからだ。」彼は証明に取りかかった。講義中の証明は、数週間に及んだ。「天は、私の尊大さに腹を立てられたようだ。」

・Birkoff 夫人「ねえ、私の主人は、新婚旅行の間に私に地図を描かせて、それに色を塗っていたけど、あなたのご主人もそうだった？」

Gardner の「エイプリルフール」

雑誌「Scientific American」1975年4月号 Gardner の記事「なぜか世間の注目をひかなかつたセンセーショナルな発見」。

1. 4色問題の反例の発見
2. $e^{163\pi}$ が整数であることが証明
3. チェスの必勝法がコンピュータで発見
4. 特殊相対性理論の矛盾の発見
5. レオナルド・ダ・ビンチの手稿の欠落部の発見。彼は水洗便所を発見していた
6. 心霊モーター

この記事は、Gardner がエイプリルフールの冗談として載せたもので、記事にだまされた読者が続出して大騒ぎになった。

グラフの彩色数

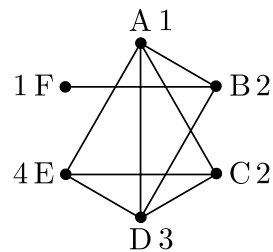
グラフの頂点に色を塗る。但し、辺で結ばれている頂点同士は異なる色で塗る。最低何色必要か。これを**グラフの彩色**と呼び、必要な色の数をグラフの**彩色数** (chromatic number) という。

倉庫の問題

ある工場では、6種類の化合物を生産している。これらの化合物は、組合せ次第では同じ倉庫に保管すると爆発する恐れがある。爆発する恐れがある化合物は同じ倉庫に保管しないようにするには、倉庫はいくつ必要か。

A	B,C,D,E
B	A,D,F
C	A,D,E
D	A,B,C,E
E	A,C,D
F	B

この状況をグラフで表す．6個の化合物を頂点とし，同じ倉庫に保管してはいけないものの同士を辺で結ぶ．



倉庫がいくつ必要かは，グラフの彩色問題に帰着される．このグラフの彩色数は4である．従って，倉庫は4つ必要である．爆発する恐れのある危険な組合せは，異なる色で塗られているので，同じ倉庫には保管されない．

倉庫	化合物
1	A,F
2	B,C
3	D
4	E

時間割編成問題

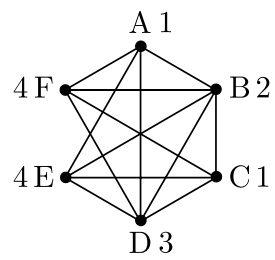
数学科の教務委員は，次の学期に開講される授業科目の時間割を組まなければならない．

授業は，A,B,C,D,E,Fの6科目が予定されている．その学科の学生は10名であり，各学生が受けたい授業科目は下表のようになっている．

	A	B	C	D	E	F
1	O	O		O	O	
2			O	O	O	
3		O		O	O	
4			O	O		O
5	O	O		O		
6		O	O	O		O
7	O	O				O
8		O		O		O
9			O	O		O
10				O	O	

どの学生も希望する科目をすべて受けられるようにするには，どのような時間割を組めばよいか．教務委員はなるべく少ない枠に6科目を納めたいと思っている．

授業科目A,B,C,D,E,Fを頂点とし，同時に開講してはいけない授業を辺で結ぶとグラフが出来る．辺で結ばれていない授業は同時に開講してもよい授業である．



このグラフの彩色数を求める．このグラフは4色で彩色可能である．また，頂点 A,B,D,E の4頂点はすべて辺で結ばれているため，3色では彩色出来ない．

	月	火
1 限	A,C	D
2 限	B	E,F

参考文献

小林みどり あたらしいグラフ理論入門 牧野書店
 ロビンソン 四色問題 新潮社

