科学の言語としての数学

折り紙の数理

「ミウラ折り」をめぐって

平成27年12月8日

奈良女子大学数学教室教授　小林毅

（生徒・学生）

「数学の研究って、なんですか？」

岡 潔（おか きよし、1901年4月19日 - 1978年3月1日）：奈良女子大学名誉教授。多変数解析函数論において大きな業績を残した。そこでは幾何、代数、解析が三位一体となった美しい理論が展開される。

http://ja.wikipedia.org/wiki/

よく人から数学をやって何になるのかと聞かれるが，私は春の野に咲くスミレはただスミレらしく咲いているだけでいいと思っている．咲くことがどんなによいことであろうとなかろうとそれはスミレのあずかり知らないことだ．（エッセイ「春宵十話」より）

でも、生活に役立つこともたくさんあります

ロナルド・リベスト、

アディ・シャミア、

レオナルド・エーデルマン

1977年当時、デフィーとヘルマンによって発表されたばかりの公開鍵暗号という新しい概念に対し、それを実現できる具体的なアルゴリズムを与えました。

その他の例については例えば:

http://www.koho2.mext.go.jp/157/#page=33（数学イノベーションについて）

を参照してください。

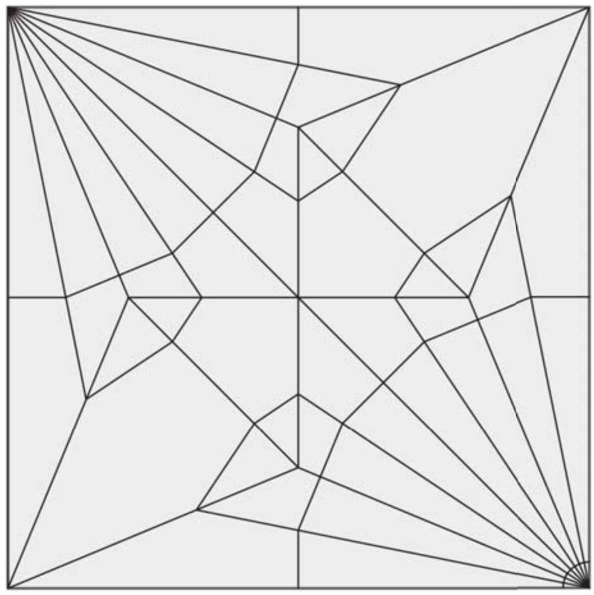
但し

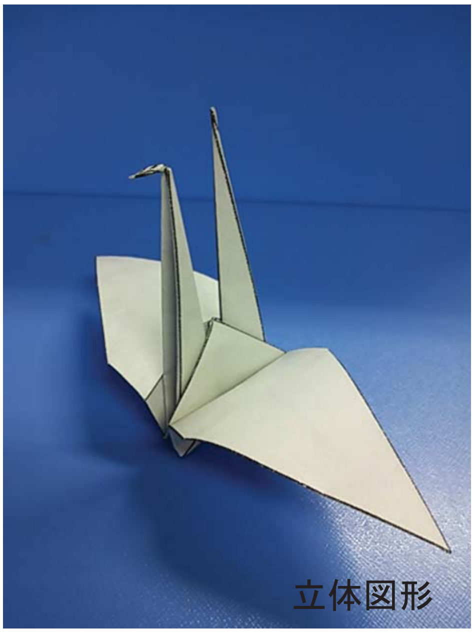
このような説明は数学者が数学をする動機を十分に説明しているとは思えないのですが･･･
（個人的な印象です）

今日のお話

最近「折り紙」という話題を通して、このような問いかけへの答えの一例となる，仕事ができた気がするので、ご紹介したいと思います。

折り紙



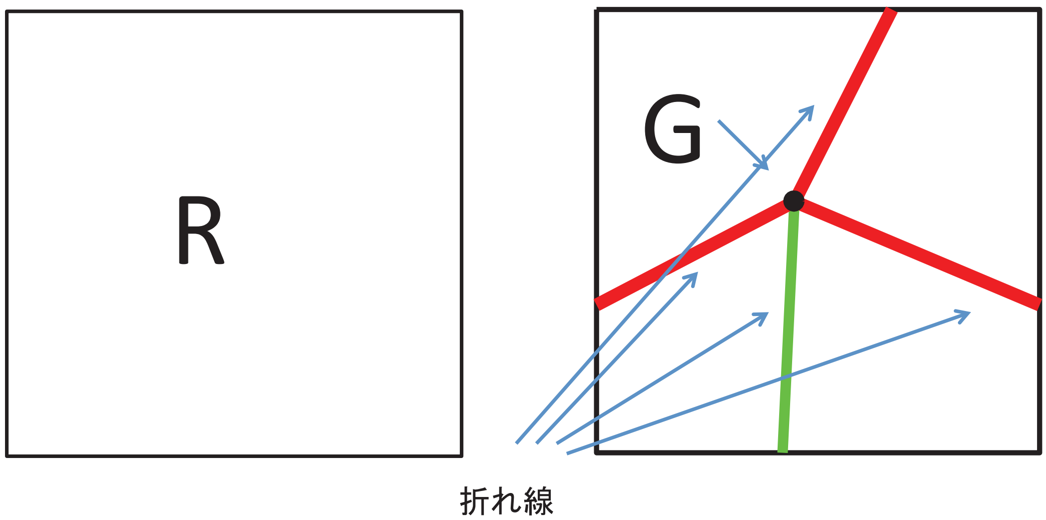


数学者の態度1:定式化

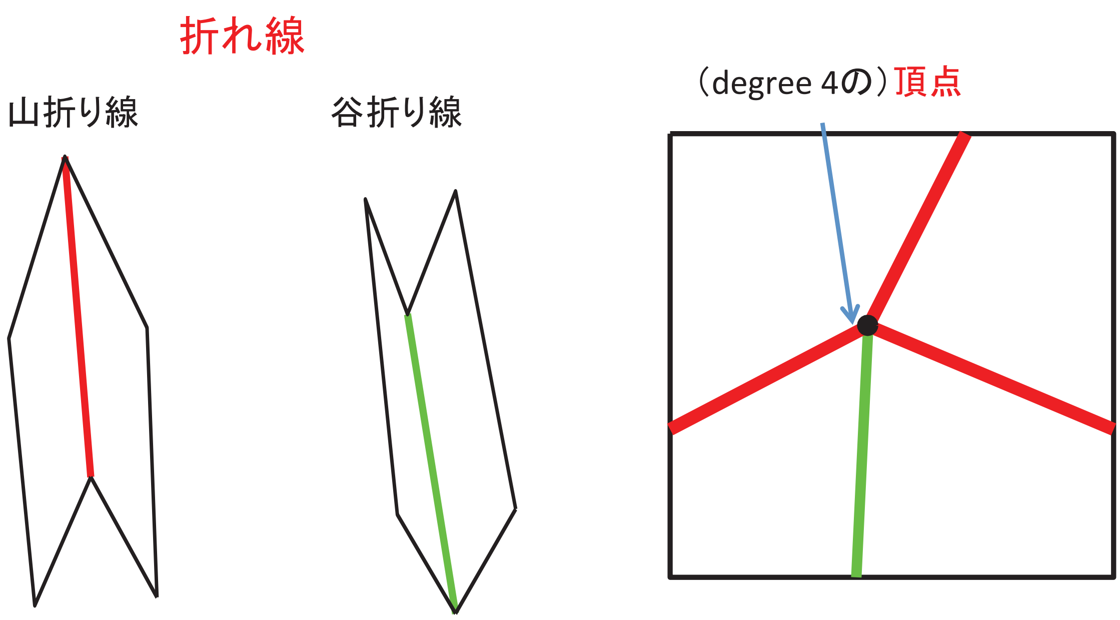
物事を考えるにあたって、とりあえず何を考えるのか、はっきりさせる

折り紙の(数学的)定式化

- (R,G)

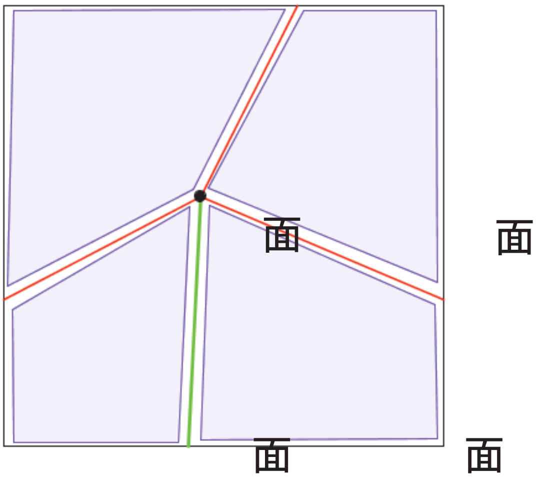


折れ線, 頂点

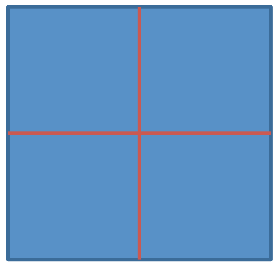


面

面 $R \setminus G$



この講演では出来上がった立体図形において各面はflatであると仮定する



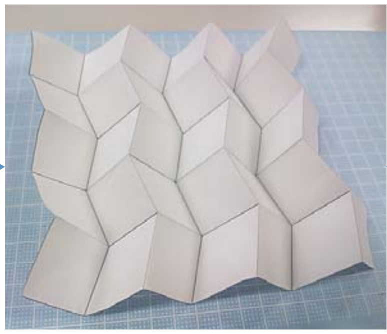
折れない展開図

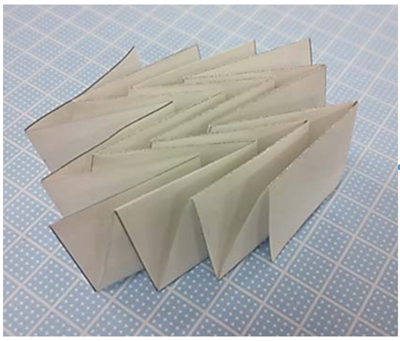
flat な折り紙

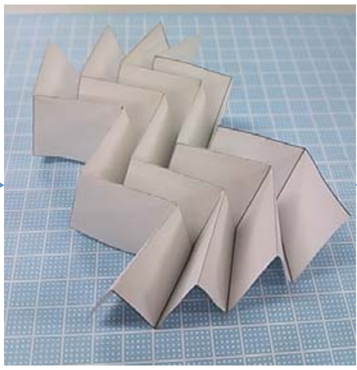
- 完成形が平面に押し付けられるような折り紙を flat な折り紙という.

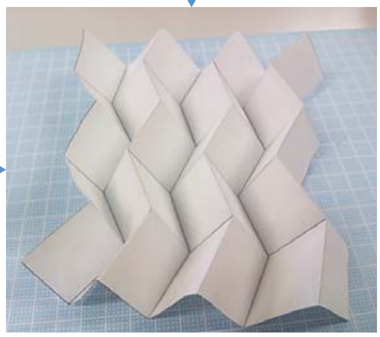
http://www.origami-club.com/valentine/heart-crane/index.html

flat な折り紙の例









ミウラ折り

三浦公亮(みうらこうりょう)

1930年東京生まれ。
東京大学工学部卒業。

東京大学宇宙航空研究所、文部科学省宇宙科学研究所

人工衛星・惑星の開発設計に関り、新しい宇宙構造物の発明と宇宙での構築を実現し「宇宙の建築家」と呼ばれる。

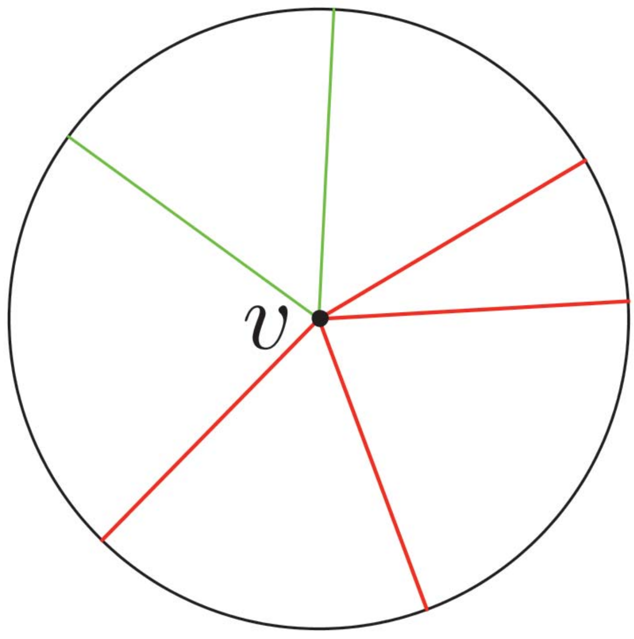
http://www.miuraori.biz/hpgen/HPB/entries/9.html

数学者の態度2:定式化

- 数学者のよく取る態度・・・
  物事を思い切り単純化

1頂点折り

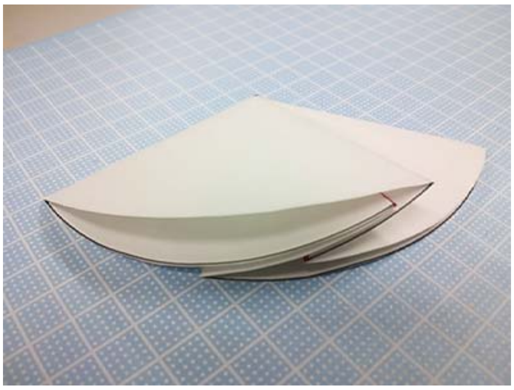
- 次のような単純な展開図 を考える.

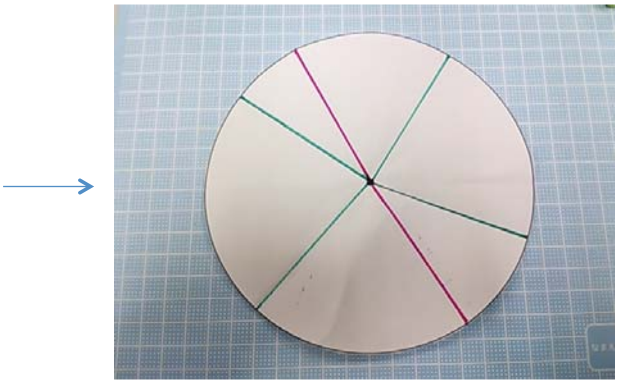


1頂点折り

■定理（Theorem 2.1）

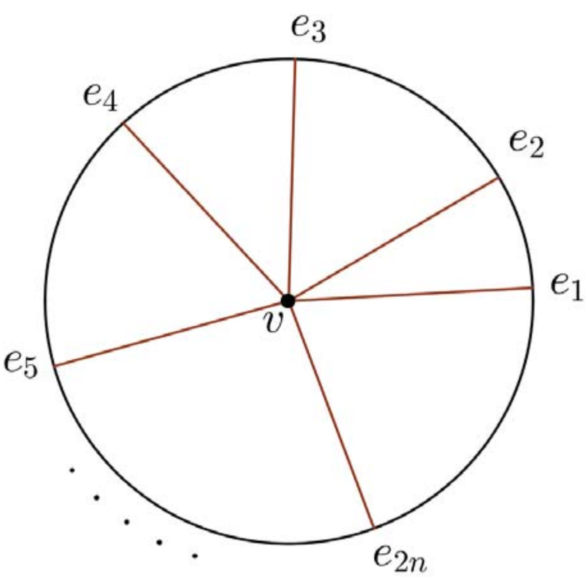
展開図 (R,G) を1頂点折りとする. いま, (R,G) は flat な折り紙とする. このとき, 頂点 v の degree は偶数である.





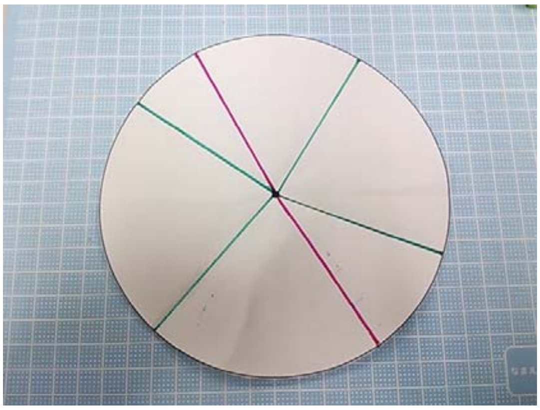
1頂点平坦折り

- 次のような 一頂点折り (R,G) を考える.



1頂点平坦折り

Theorem 2.3 (前川-Justin) ([O, Theorem 4.2], [前川], [J]) 展開図 (R, G) を 1 頂点折りとする．いま，(R, G) は flat な折り紙とする．このとき，折れ線 $e_1, e_2, \ldots, e_{2n}$ の中の山折り線の数を M，谷折り線の数を V とすると $M - V = 2$ 又は -2 が成り立つ．



更に単純化

更に単純化して、

頂点のdegreeは4としてみよう

■定理 (Degree 4 flat folding)

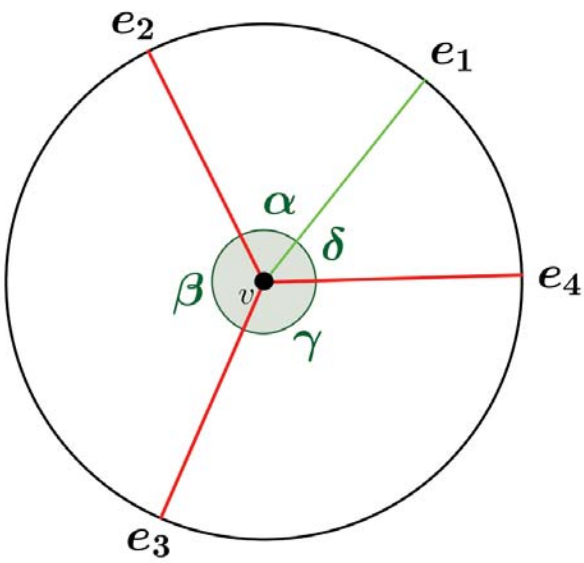
頂点のDegreeが4である一点折り (R,G) がflat な折り紙となる必要十分条件は, 次の3条件が成り立つことである.

1. (前川-Justin) $e{\downarrow}1$, $e{\downarrow}2$,$e{\downarrow}3$,$e{\downarrow}4$ の中の山折り線の数と谷折り線の数を考えると, 一方の数は **1**, 他方の数は **3** である.

2. $\boldsymbol{\alpha+\gamma=\beta+\delta=\pi}$

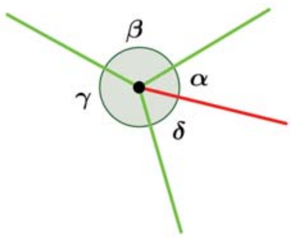
3. 一般性を失うことなく「 $e{\downarrow}1$ は山折り線, $e{\downarrow}2$,$e{\downarrow}3$,$e{\downarrow}4$ はともに谷折り線」又は,「 $e{\downarrow}1$ は谷折り線, $e{\downarrow}2$,$e{\downarrow}3$,$e{\downarrow}4$ はともに山折り線」と仮定してよいが, このとき

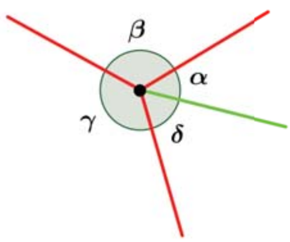
$$\boldsymbol{\alpha\leq\beta}$$



一般化されたミウラ折り

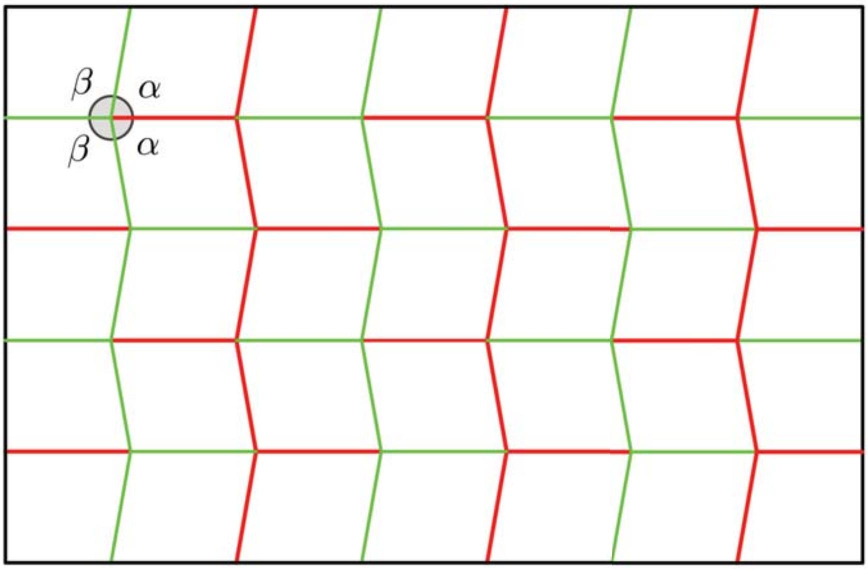
一般に, 展開図 (R, G) に対して, その各頂点の degree が 4 であり, かつ, 定理(degree 4 flat folding)の条件を満たすとき, この折り紙は<u>一般化されたミウラ折り</u>であると呼ぶことにする.





$$\alpha+\gamma\ (=\beta+\delta)=\pi, \alpha<\beta\ (,\delta<\gamma)$$

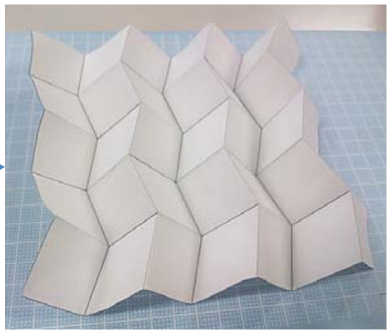
ミウラ折り

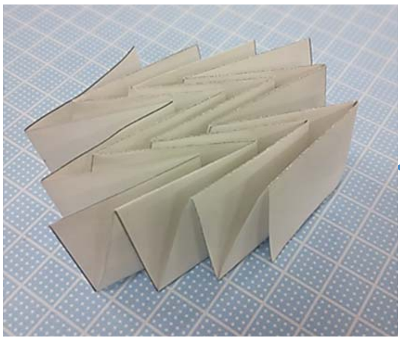


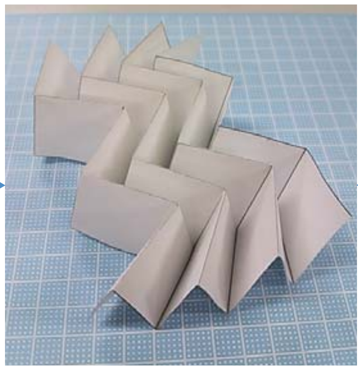
$\alpha=\alpha$, $\beta=\beta$,
$\gamma=\beta$, $\delta=\alpha$

1. Degreeは 4 で, 山折り線と谷折り線の数の差は 2 である.
2. $\alpha+\beta+\alpha+\beta=2\pi$
   $2(\alpha+\beta)=2\pi$
   $\alpha+\beta=\pi$
3. $\alpha<\beta$

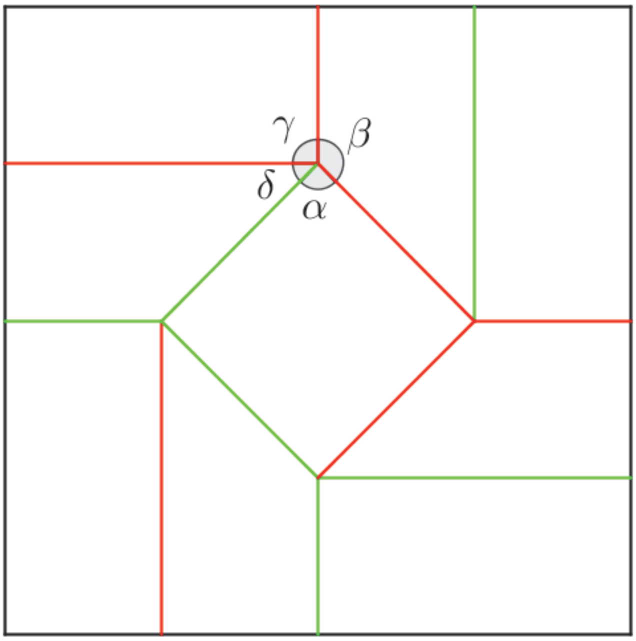
ミウラ折り

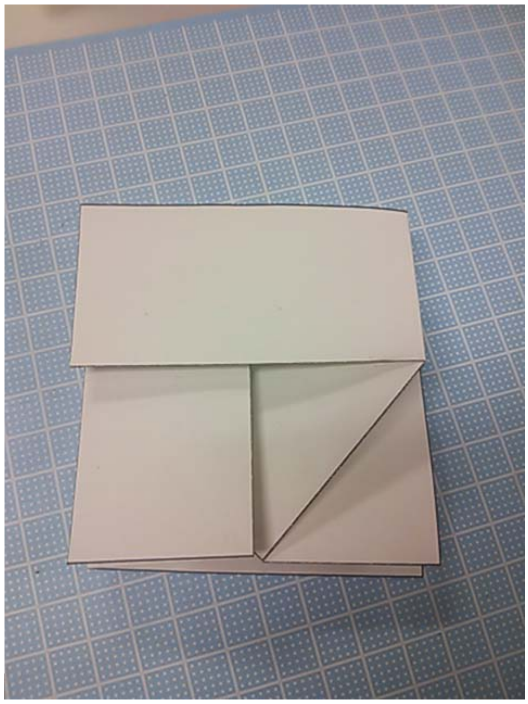






Square Twist



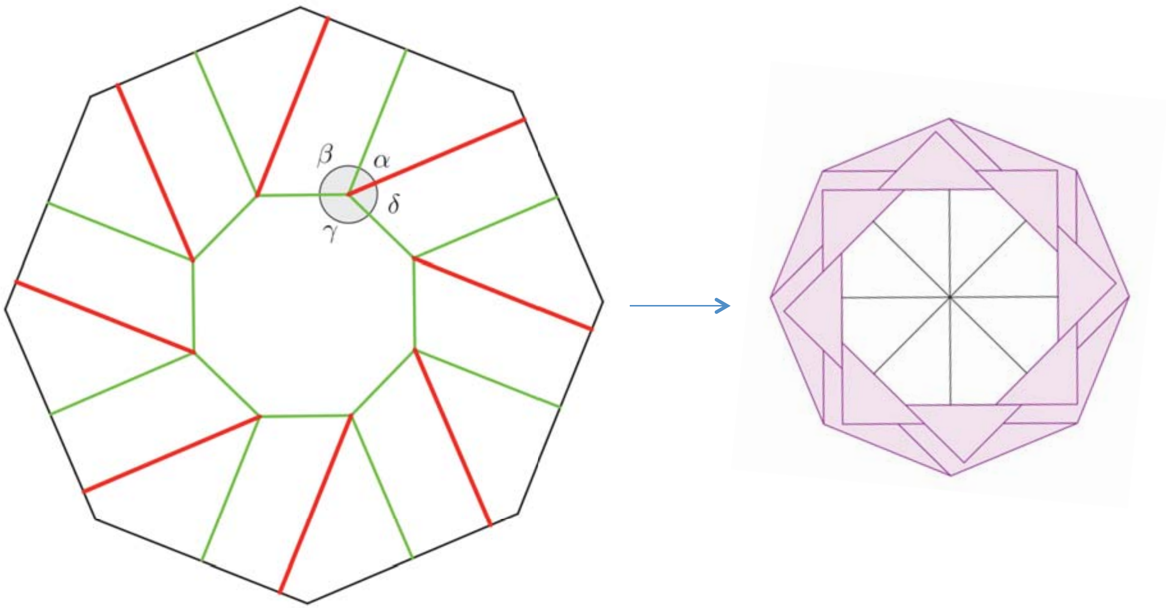


$\alpha=\pi/2$, $\beta=3/4\,\pi$, $\gamma=\pi/2$, $\delta=\pi/4$

花紋折り

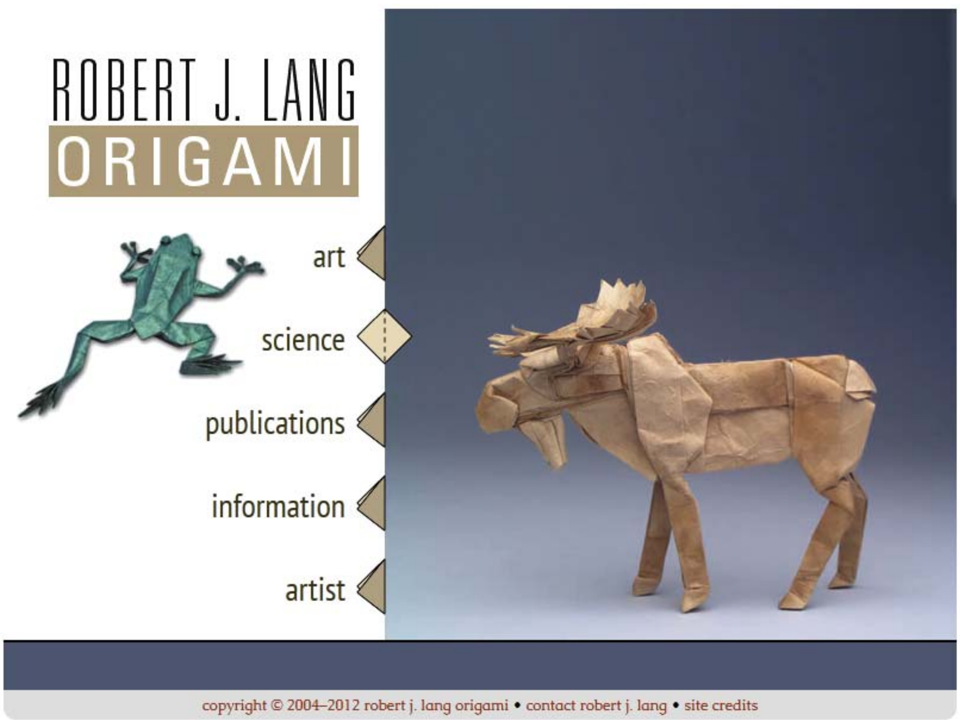
http://homepage3.nifty.com/youyoutei/kamon.htm

花紋折り



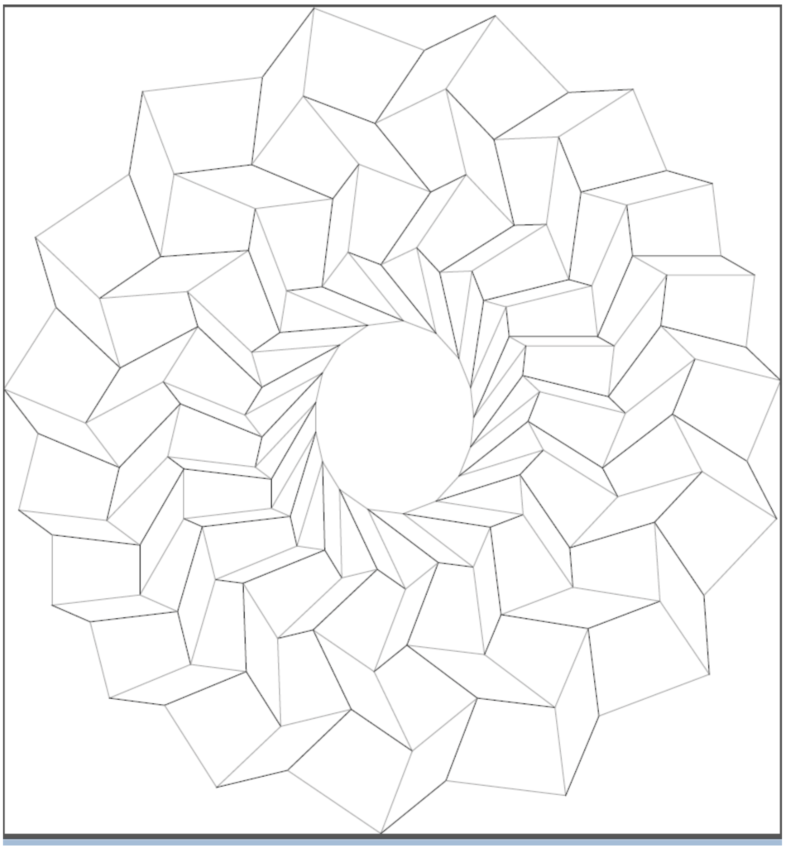
$\alpha=\pi/4$, $\beta=5/8\,\pi$, $\gamma=3/4\,\pi$, $\delta=3/8\,\pi$

Robert J. Lang



http://www.langorigami.com/

Oval Tessellation



Oval Tessellation

数学者の態度3：構造化

いろいろな現象が見つかったら、
そこになにか（数学的）構造が
見いだす

ところで

- 私の専門は、位相幾何学、特に低次元トポロジーと呼ばれる分野です

（「宇宙の形の研究」などと説明されることもあります。）

William Paul Thurston (October 30, 1946 – August 21, 2012) was an American mathematician. He was a pioneer in the field of low-dimensional topology. In 1982, he was awarded the Fields Medal for his contributions to the study of 3-manifolds. From 2003 until his death he was a professor of mathematics and computer science at Cornell University.

BULLETIN (New Series) OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 6, Number 3, May 1982

THREE DIMENSIONAL MANIFOLDS, KLEINIAN GROUPS AND HYPERBOLIC GEOMETRY

BY WILLIAM P. THURSTON

1. A conjectural picture of 3-manifolds. A major thrust of mathematics in the late 19th century, in which Poincaré had a large role, was the uniformization theory for Riemann surfaces: that every conformal structure on a closed oriented surface is represented by a Riemannian metric of constant curvature. For the typical case of negative Euler characteristic (genus greater than 1) such a metric gives a hyperbolic structure: any small neighborhood in the surface is isometric to a neighborhood in the hyperbolic plane, and the surface itself is the quotient of the hyperbolic plane by a discrete group of motions. The exceptional cases, the sphere and the torus, have spherical and Eu[illegible] structures.

この論文で”三次元多様体の“幾何構造”が導入されている

THREE DIMENSIONAL MANIFOLDS

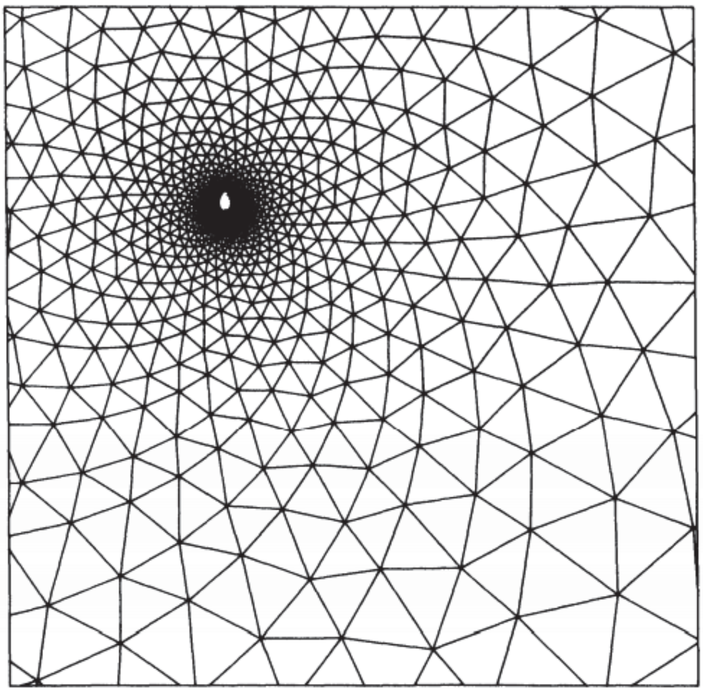
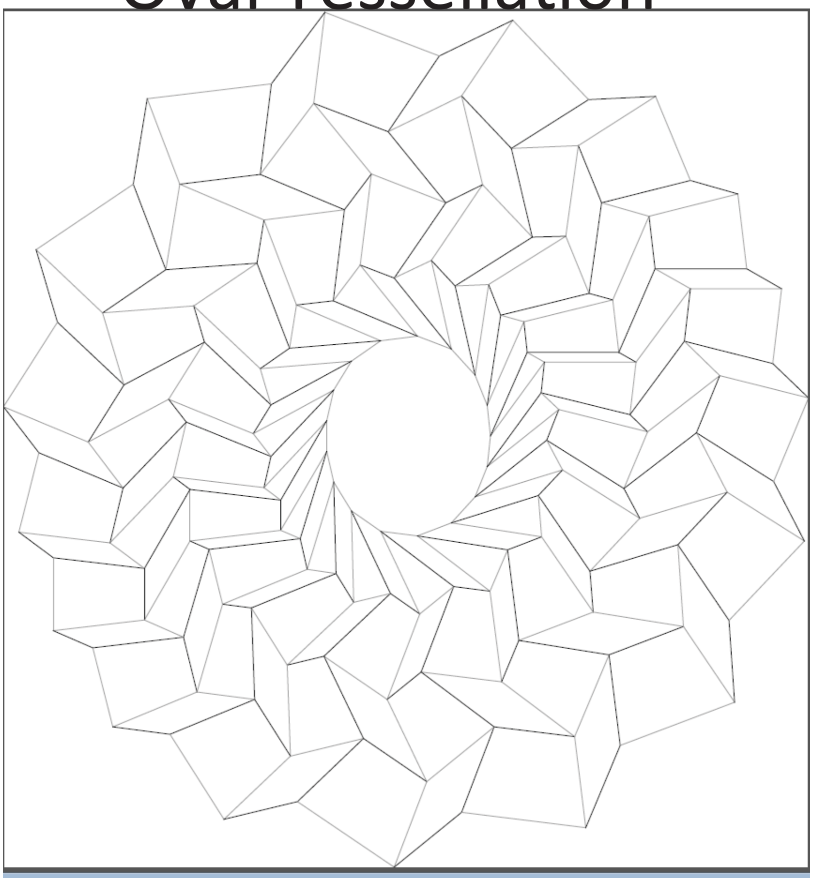
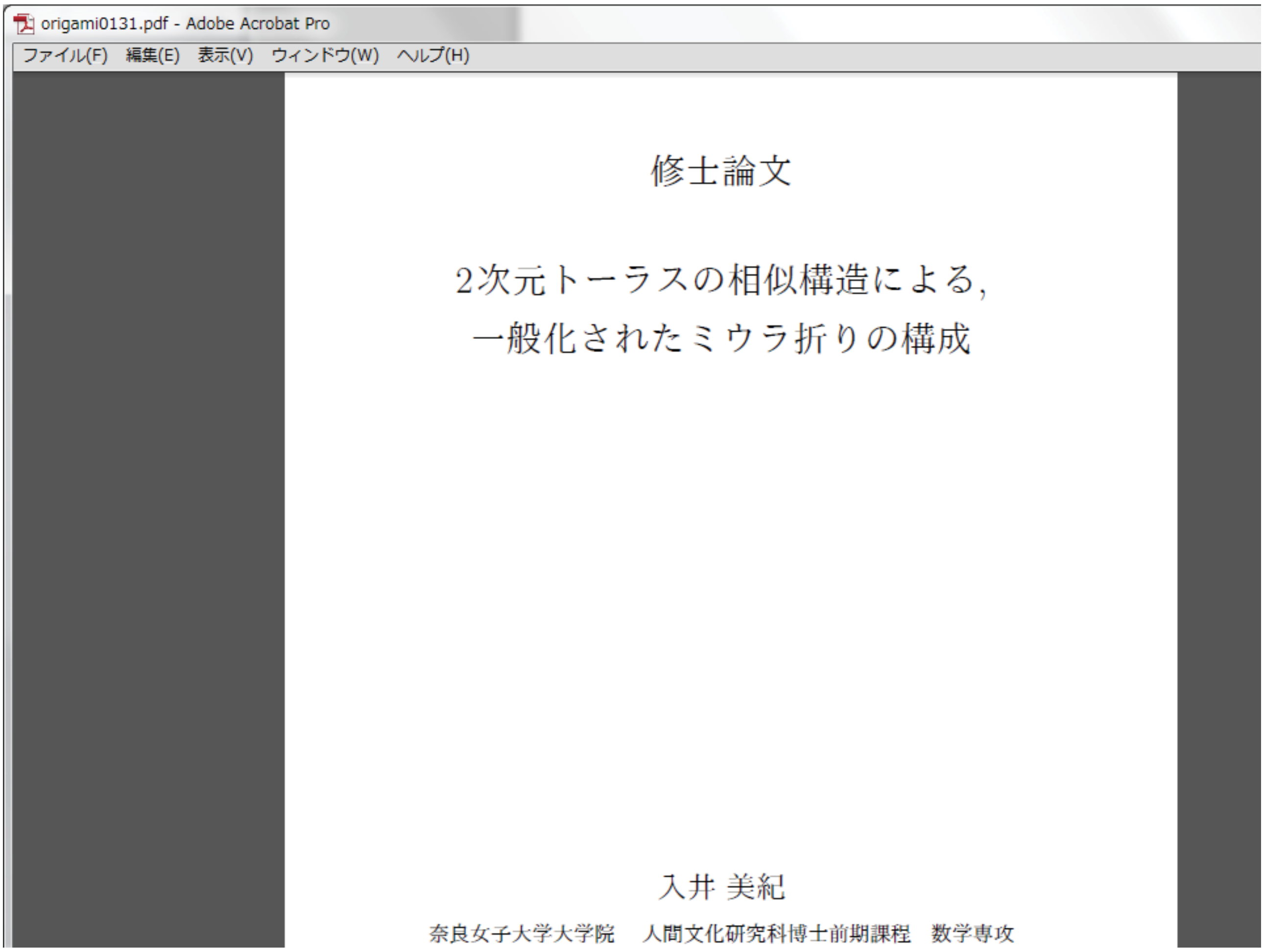


FIGURE 4. Three o'clock sky.

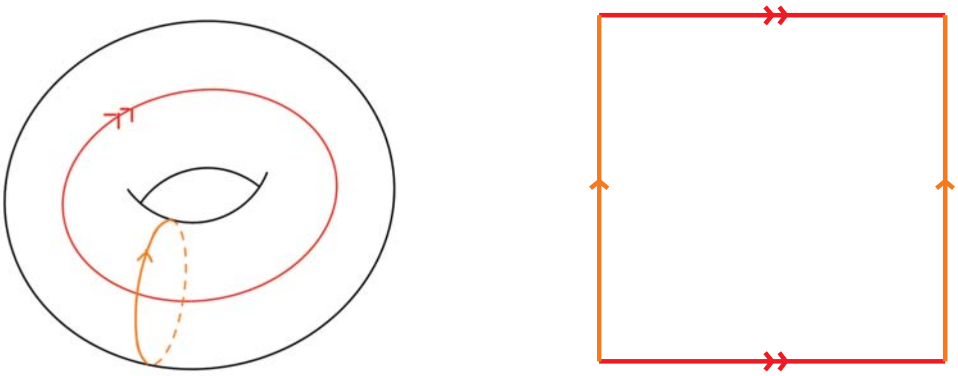
2次元トーラスの相似構造の展開写像の像

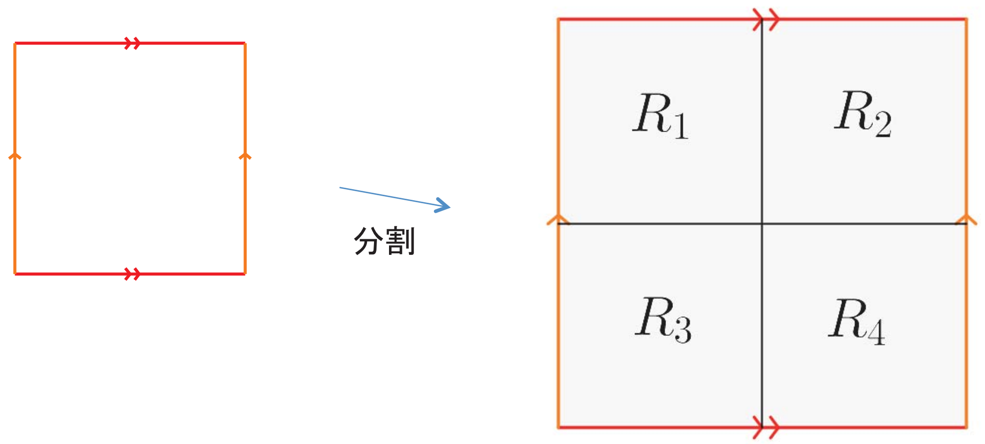
Oval Tessellation



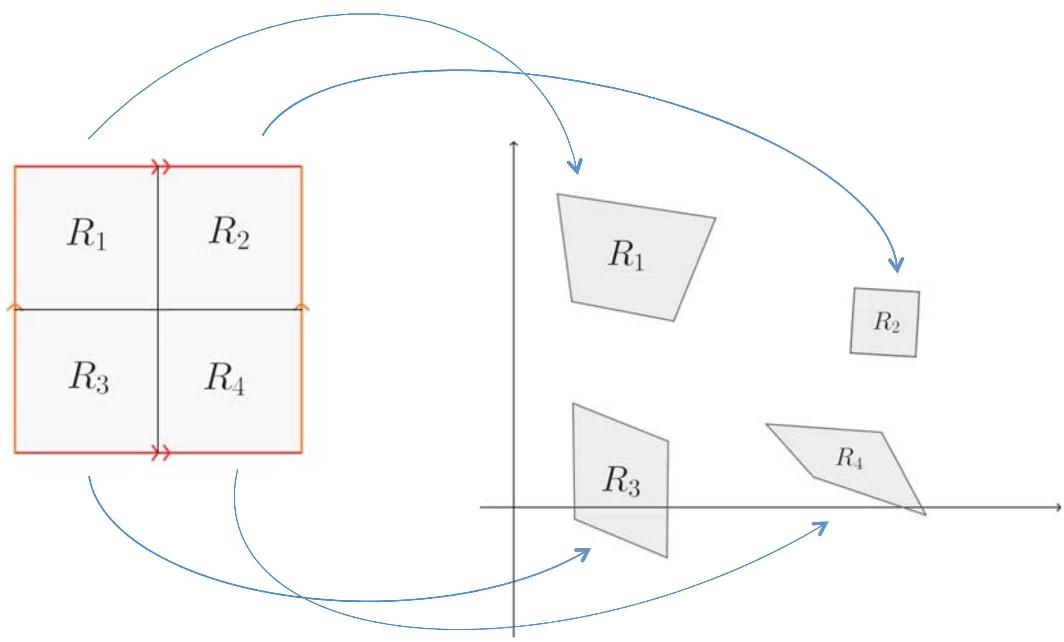


2次元トーラスの相似構造

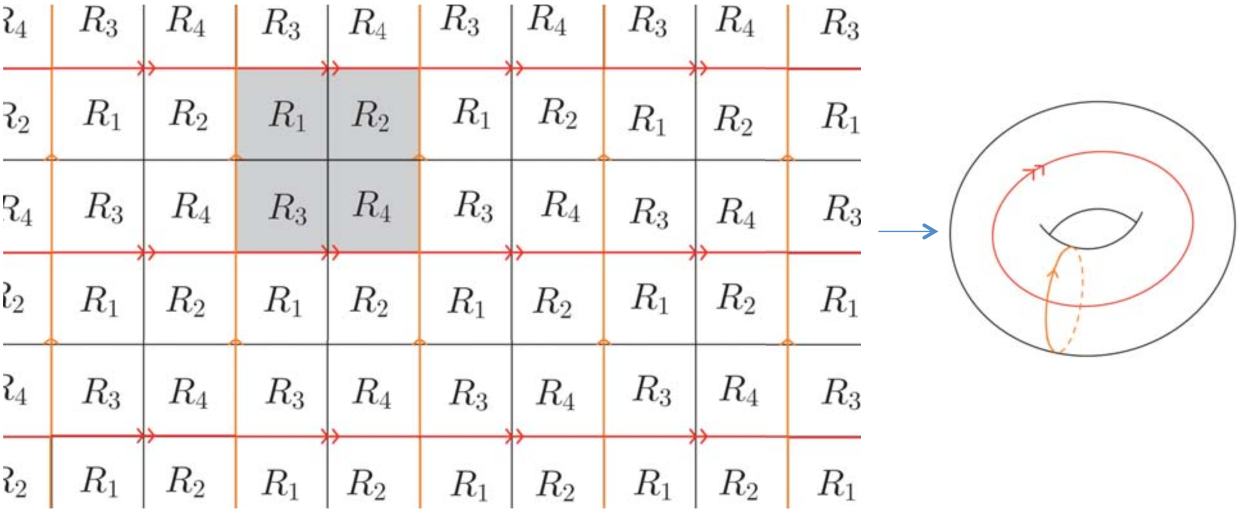




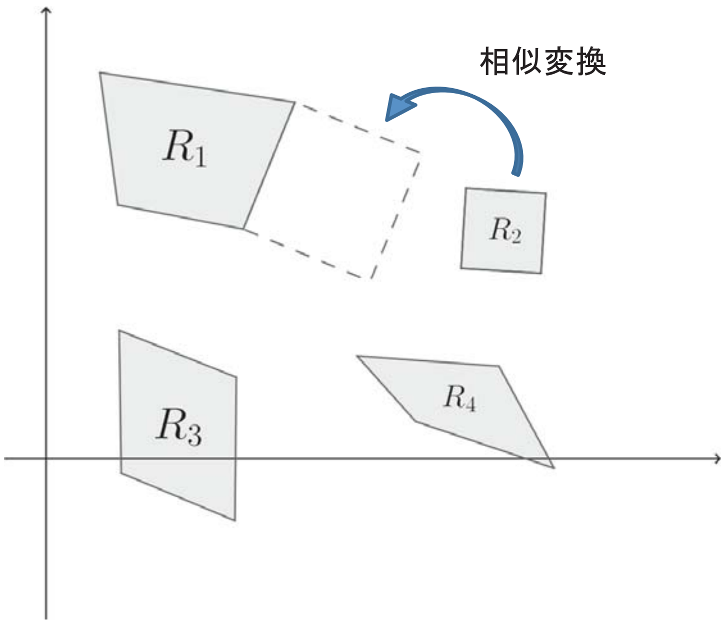
分割
R_1
R_2
R_3
R_4

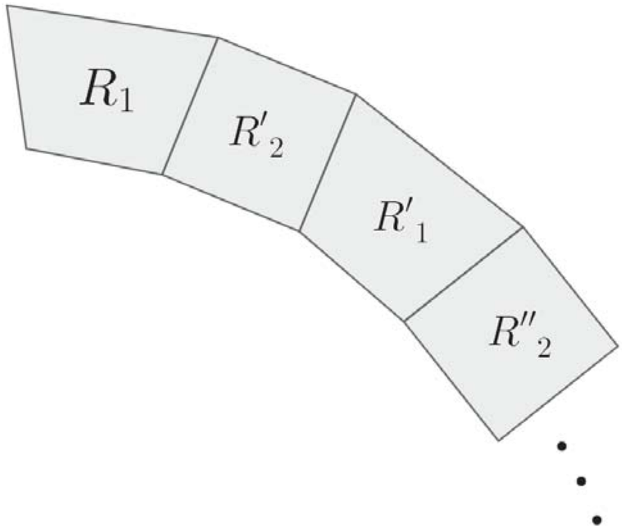


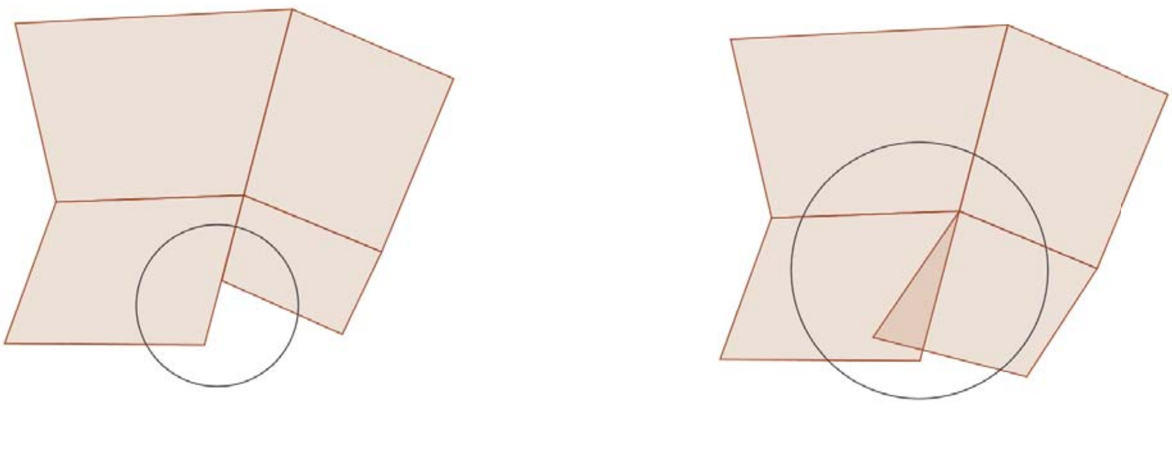
R_1
R_2
R_3
R_4
R_1
R_2
R_3
R_4



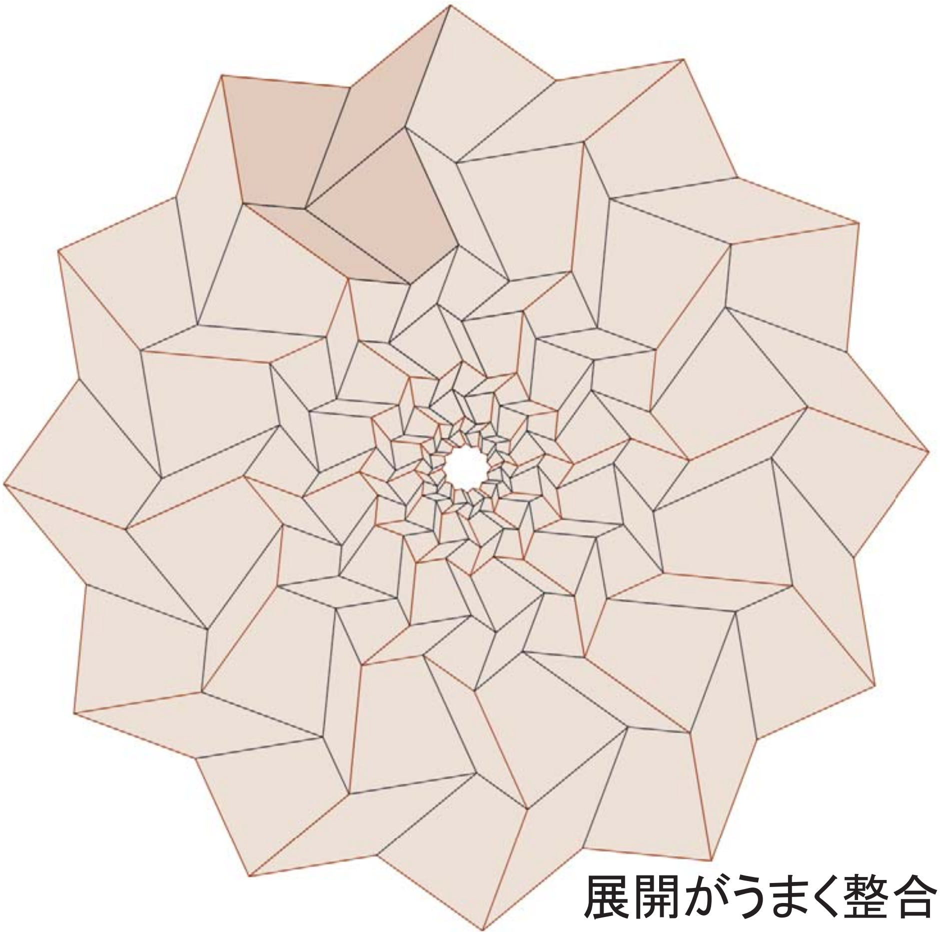
図①





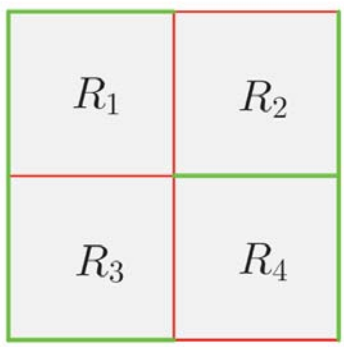


展開が局所的に整合しない状況の例



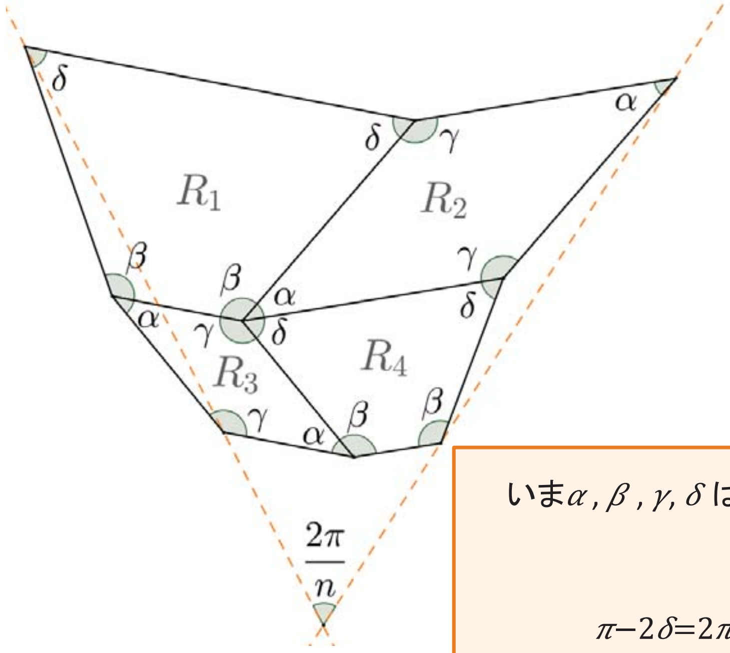
展開がうまく整合した場合

- 問. トーラス上の４個の四角形$R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$ からなる相似構造で次のようなものを見つけよ.



1. 上図のように2次元トーラスの分割 $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$ を表す1次元複体に, 山折り谷折り構造を指定する. この構造を含めて developing map を考えたとき, その像はユークリッド平面の折り紙としての展開図を与える.
2. この展開図において各頂点の周りでは 定理(degree 4 flat folding)の条件が満たされる.

今回得られた結果



次のようなR_1 , R_2 , R_3 , R_4と四角形の対応を考える.
R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , α, β , γ, δ を左図の通りとする.

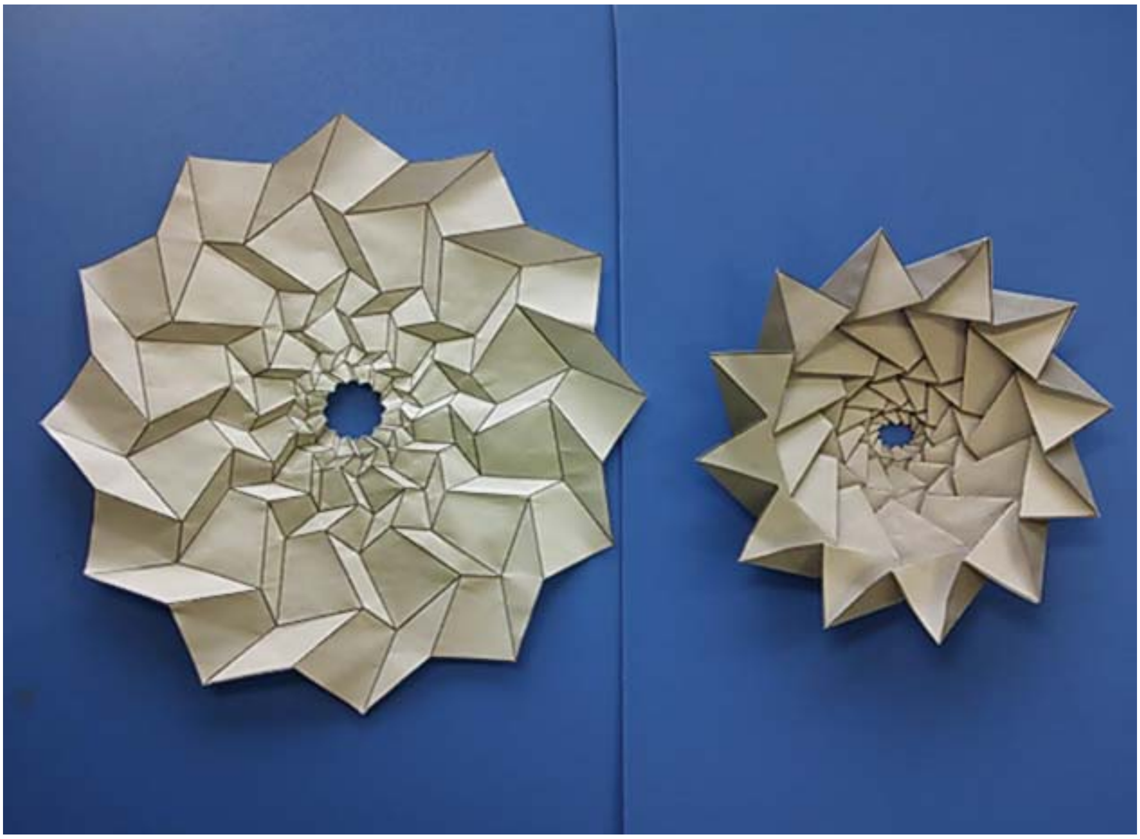
$$\begin{pmatrix} R_1 , R_4 : \text{相似な台形} \\ R_2 , R_3 : \text{平行四辺形} \end{pmatrix}$$

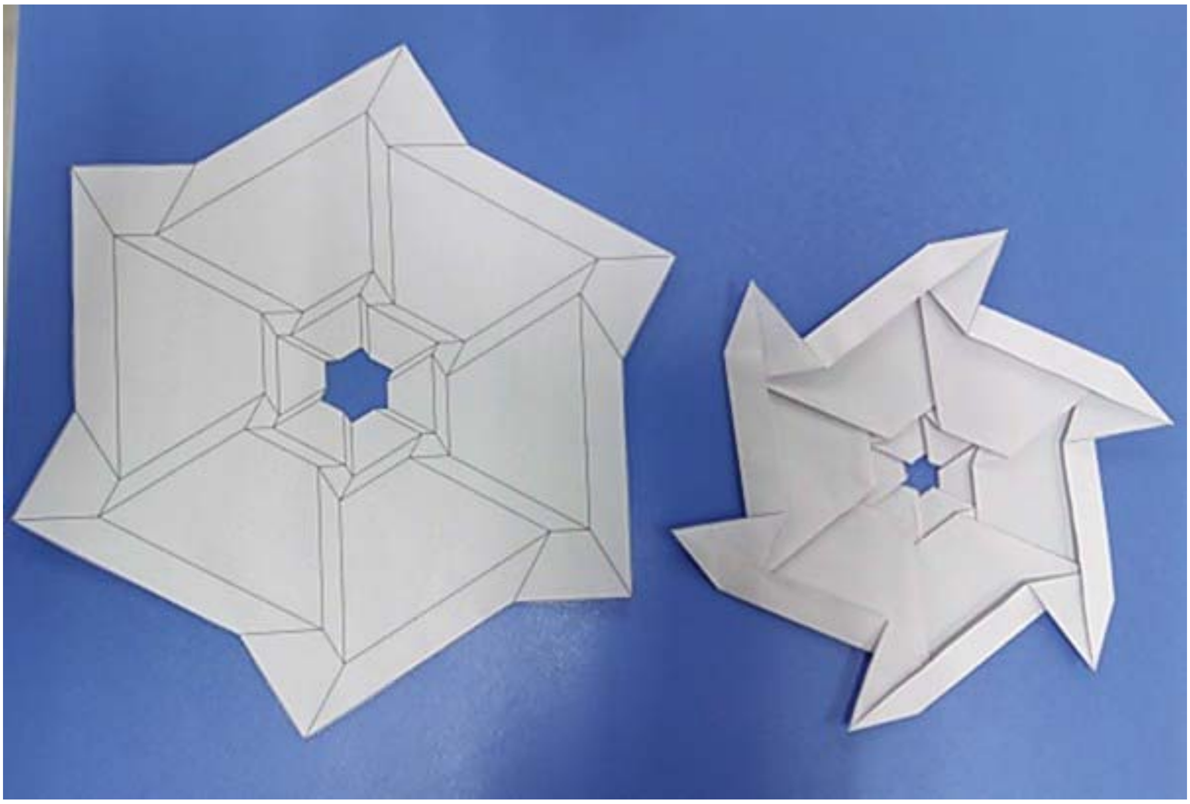
いまα, β, γ, δ は次の条件を満たすとする

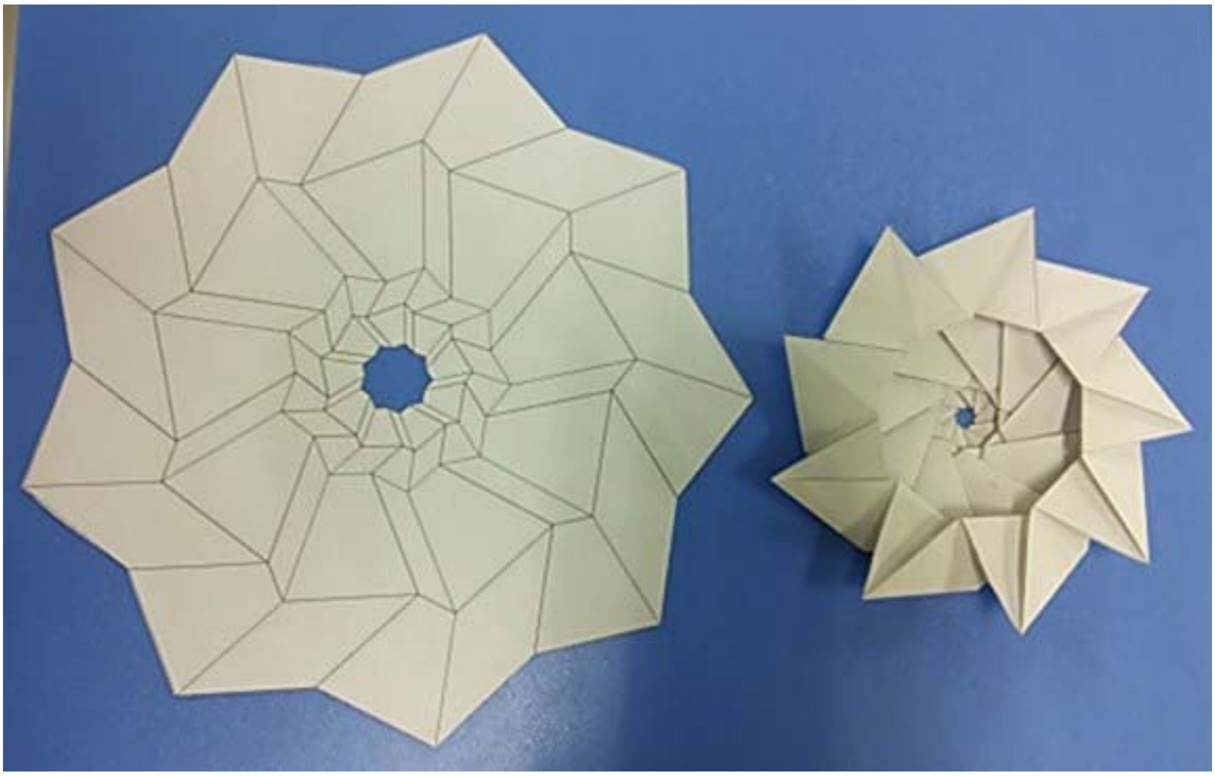
$$\alpha<\beta<\gamma ,$$

$$\pi-2\delta=2\pi/n \qquad (n\in\{3, 4, \ldots\})$$

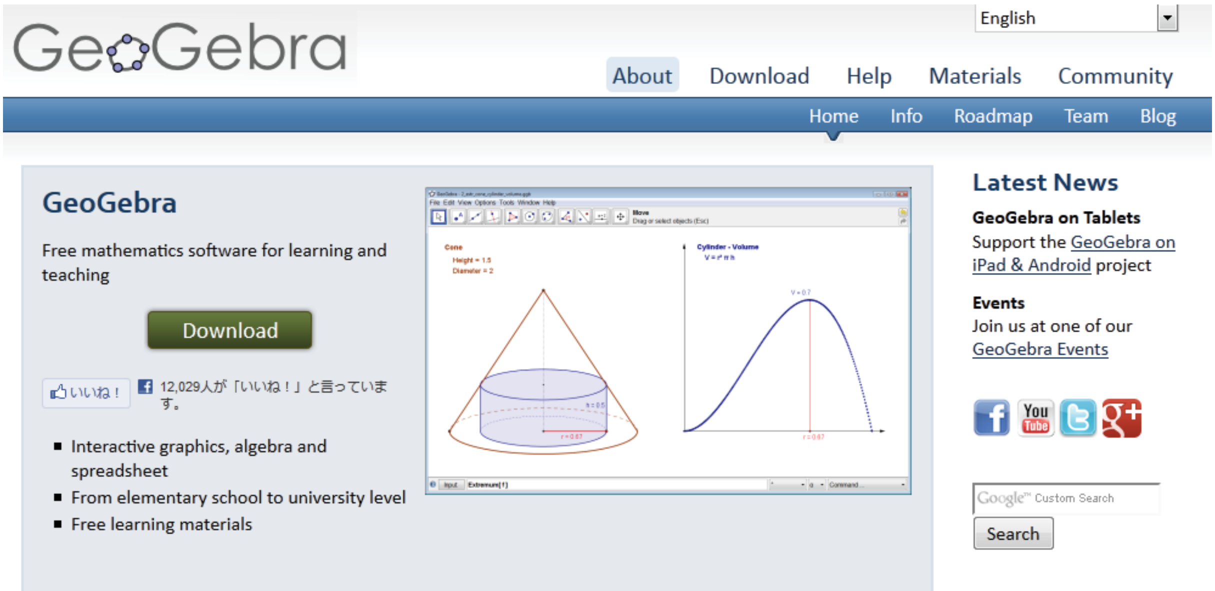
このときこの対応は問の条件を満たす相似構造を与える.







GeoGebra



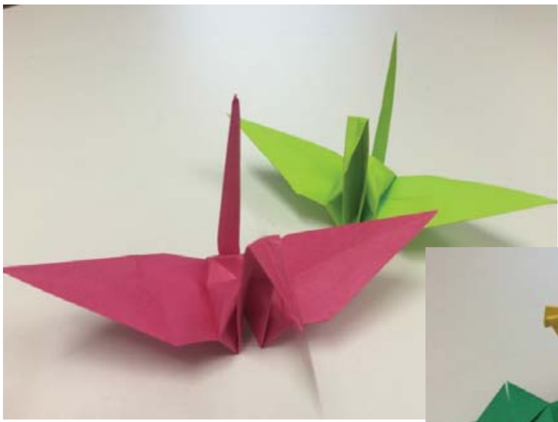
今回の発表中で用いた展開写像の図はこのソフトを用いて描きました

折り紙の数理
「花紋折りをめぐって」

平成27年12月15日

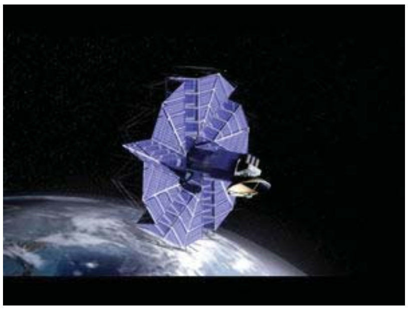
奈良女子大学数学教室教授　小林毅

背景｜折り紙といえば・・・



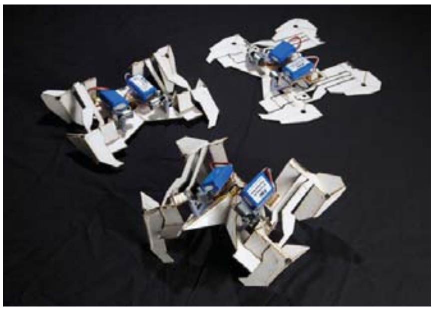
背景｜最近の折り紙は・・・

★宇宙工学



http://news.byu.edu/archive13-nov-origami.aspx

★ロボット工学



http://spectrum.ieee.org/automaton/robotics/robotics-hardware/self-folding-printable-origami-robot

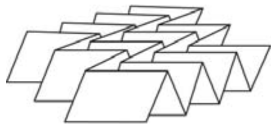
★医学

http://stentgraft.jp/general/topic05/

背景｜最近の折り紙は・・・

http://www9.nhk.or.jp/kabun-blog/700/202446.html

ハネカクシ



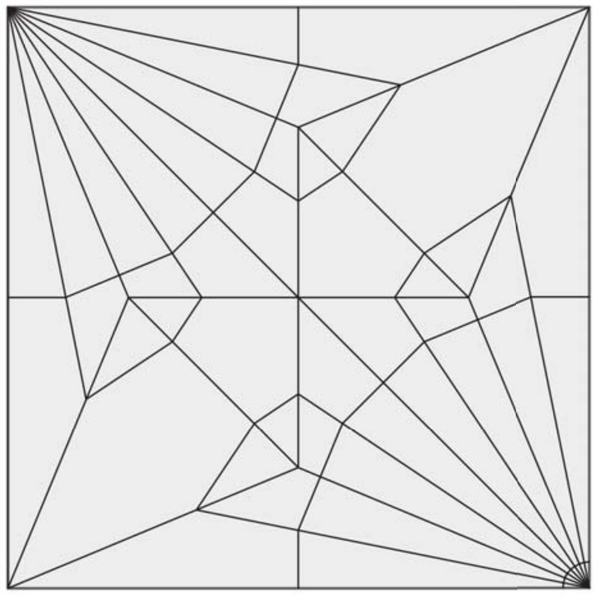
ミウラ折り

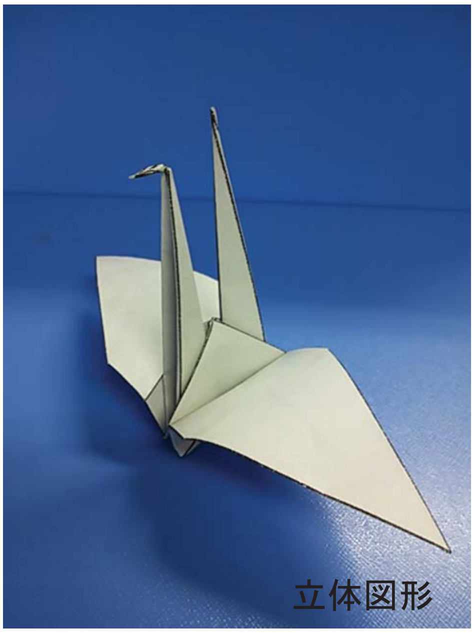
背景｜花紋折り

花紋折りの応用

復　習

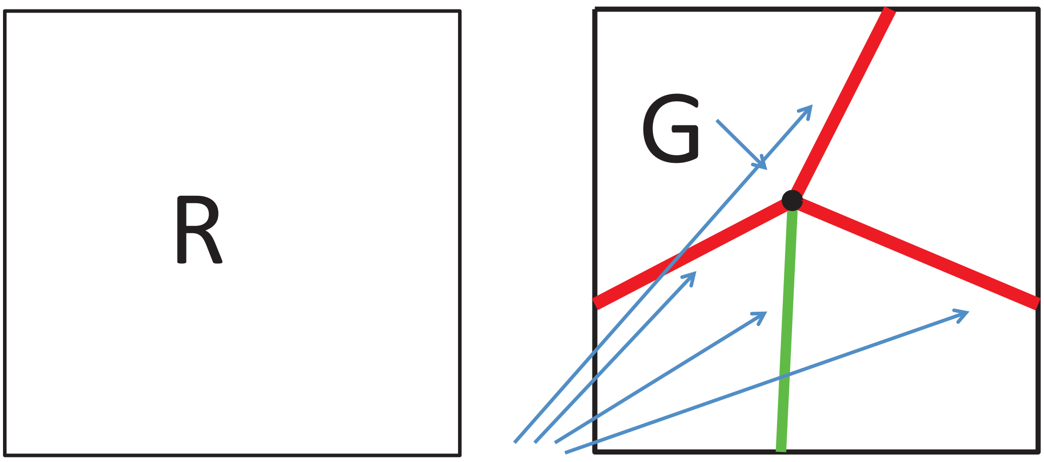
折り紙





折り紙の（数学的）定式化

- （R,G)

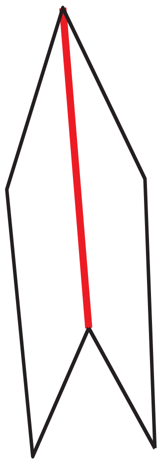


折れ線

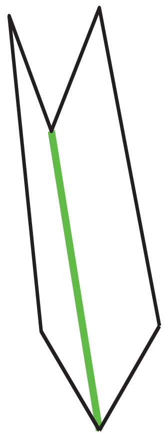
折れ線, 頂点

折れ線

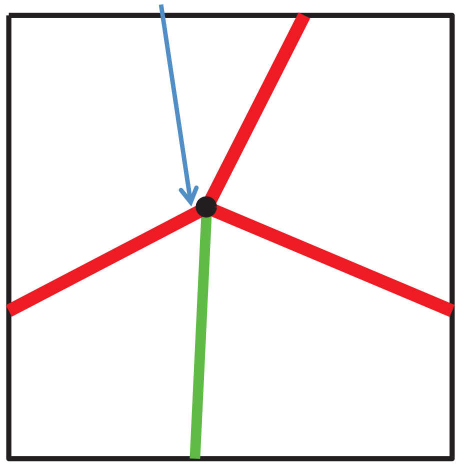
山折り線



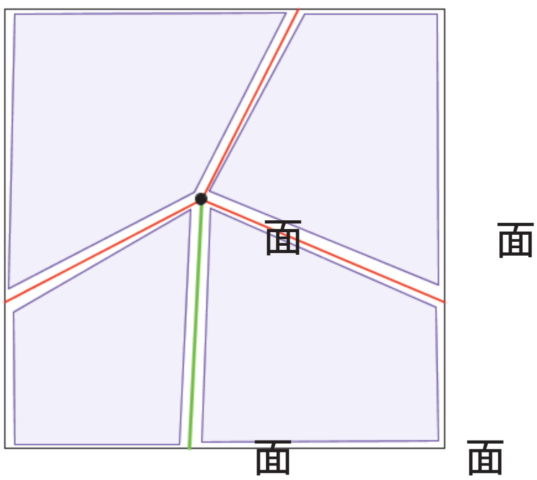
谷折り線



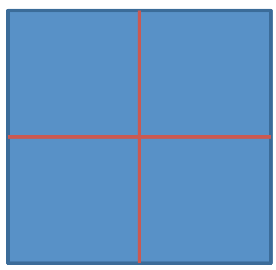
（degree 4の）頂点



面



面 $R \setminus G$



折れない展開図

この講演では出来上がった立体図形において各面はflatであると仮定する

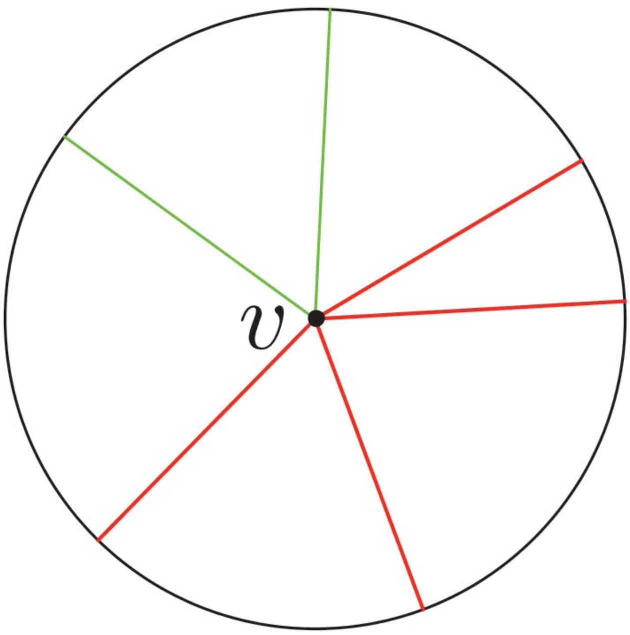
flat な折り紙

- 完成形が平面に押し付けられるような折り紙を <u>flat な折り紙</u>という.

http://www.origami-club.com/valentine/heart-crane/index.html

1頂点折り

- 次のような単純な展開図 を考える.



■定理 (Degree 4 flat folding)

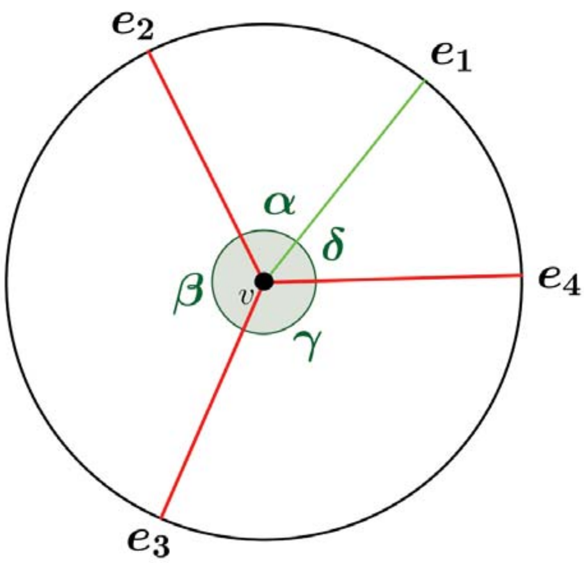
頂点のDegreeが4である一点折り (R,G) がflat な折り紙となる必要十分条件は, 次の3条件が成り立つことである.

1. (前川-Justin) e_1 , e_2 ,e_3 ,e_4 の中の山折り線の数と谷折り線の数を考えると, 一方の数は **1**, 他方の数は **3** である.

2. $\alpha+\gamma=\beta+\delta=\pi$

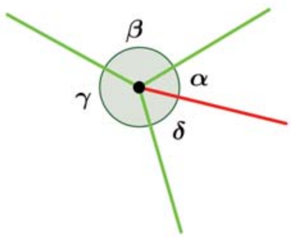
3. 一般性を失うことなく「 e_1 は山折り線, e_2 ,e_3 ,e_4 はともに谷折り線」又は,「 e_1 は谷折り線, e_2 ,e_3 ,e_4 はともに山折り線」と仮定してよいが, このとき

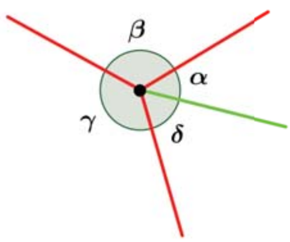
$$\alpha\leq\beta$$



一般化されたミウラ折り

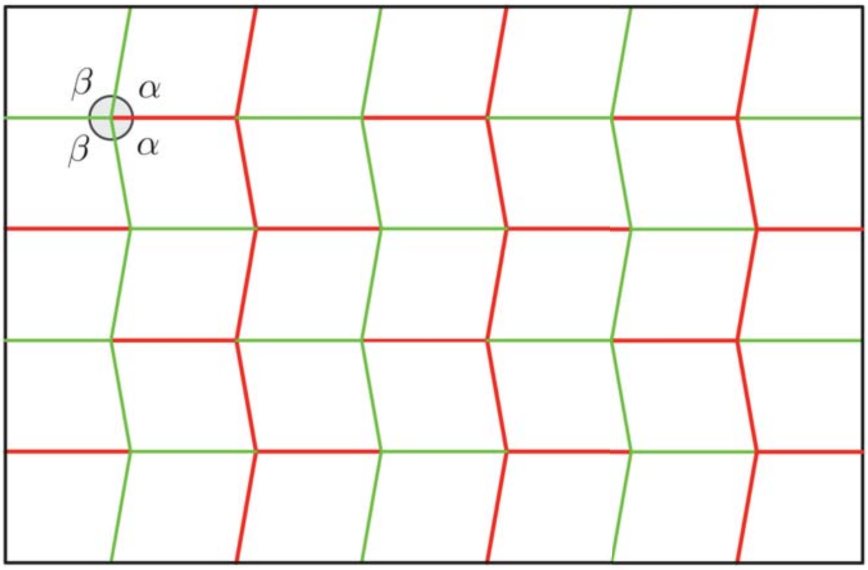
一般に, 展開図 (R,G) に対して, その各頂点の degree が 4 であり, かつ, 定理(degree 4 flat folding)の条件を満たすとき, この折り紙は<u>一般化されたミウラ折り</u>であると呼ぶことにする.





$$\alpha+\gamma\ (=\beta+\delta)=\pi,\ \alpha<\beta\ (,\delta<\gamma)$$

ミウラ折り



$\alpha = \alpha$, $\beta = \beta$,
$\gamma = \beta$, $\delta = \alpha$

1. Degreeは 4 で, 山折り線と谷折り線の数の差は 2 である.
2. $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 2\pi$
   $2(\alpha + \beta) = 2\pi$
   $\alpha + \beta = \pi$
3. $\alpha < \beta$

花紋折り

花紋折り

花紋折りの世界

（1）大小2つの正多角形が描き出す花紋の数々

花紋折りは、下のように形と色彩の組合せで驚くほど印象が変わります。

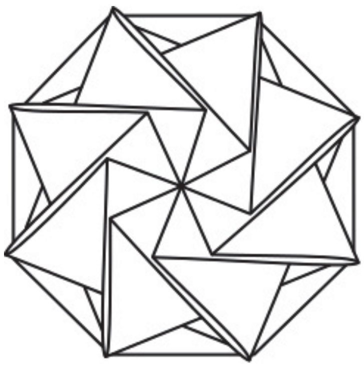
アクセサリーやブローチ、それによく回る独楽としても楽しめます。

内山光弘氏が考案された「花紋折り」は折り紙の範疇に入る作品です。
しかし、通常の折り紙よりも、ずっと精密な折り図を描く必要があります。
大小2つの正多角形（通常4～12角形）の中心をそろえて、
一方を少し回転させた図を、予め折り紙に描いてから折っていきます。
図さえ描けば、折る作業は比較的容易です。

http://homepage3.nifty.com/youyoutei/kamon.htm

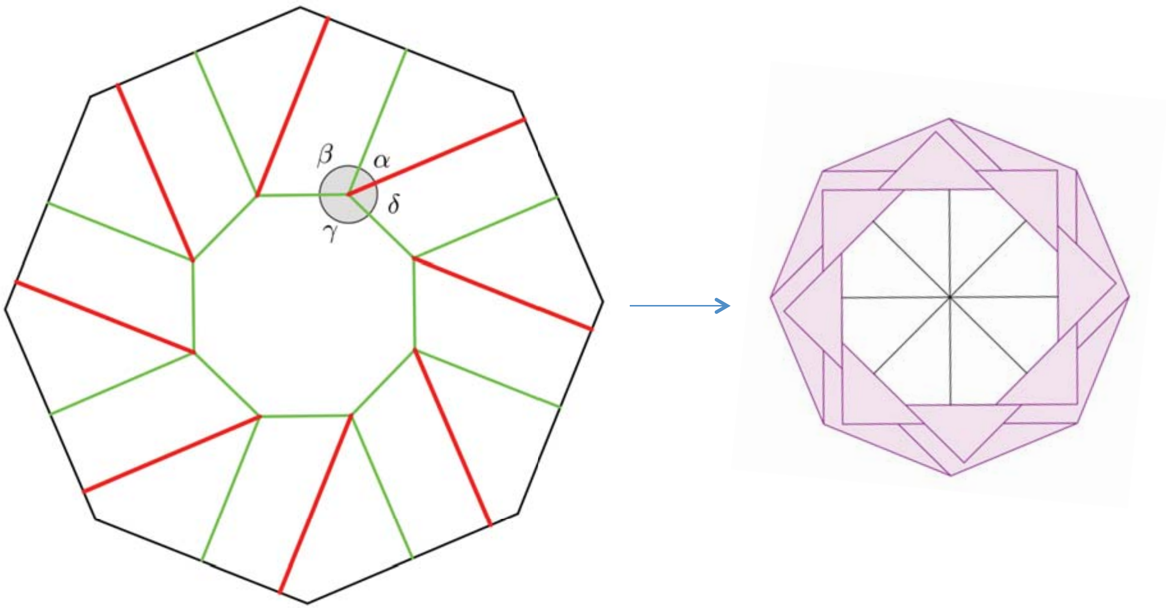
花紋折りの紹介

内山光弘氏
（1878－1967）



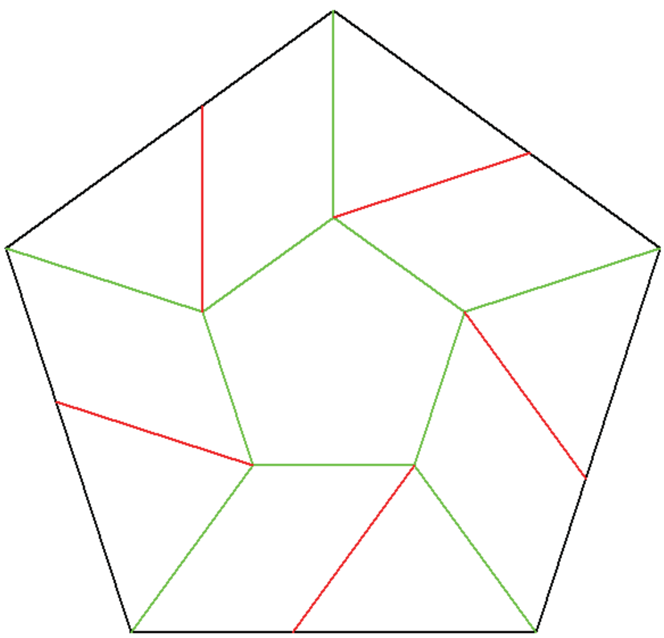
「花紋折り」　柳宗理　監修・編集，芸艸堂刊

花紋折り(8角形)

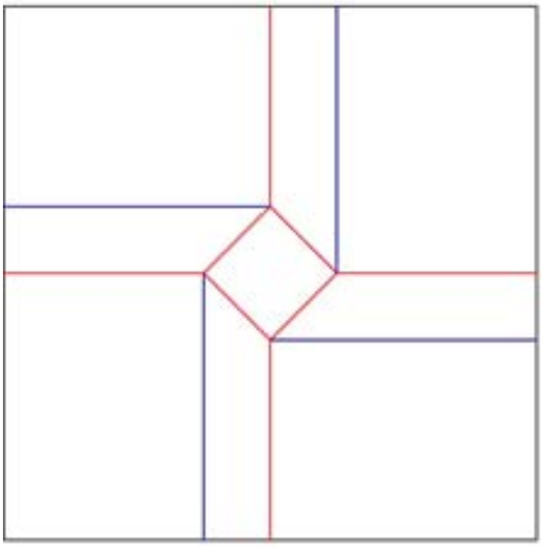


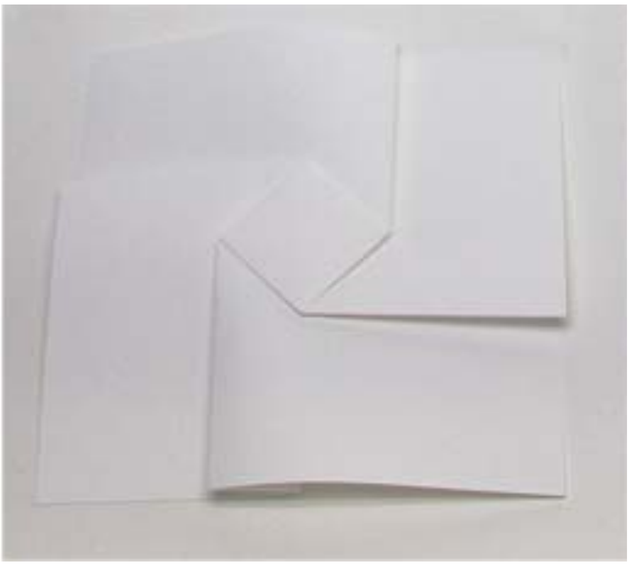
$\alpha=\pi/4$, $\beta=5/8\,\pi$, $\gamma=3/4\,\pi$, $\delta=3/8\,\pi$

花紋折り(五角形)



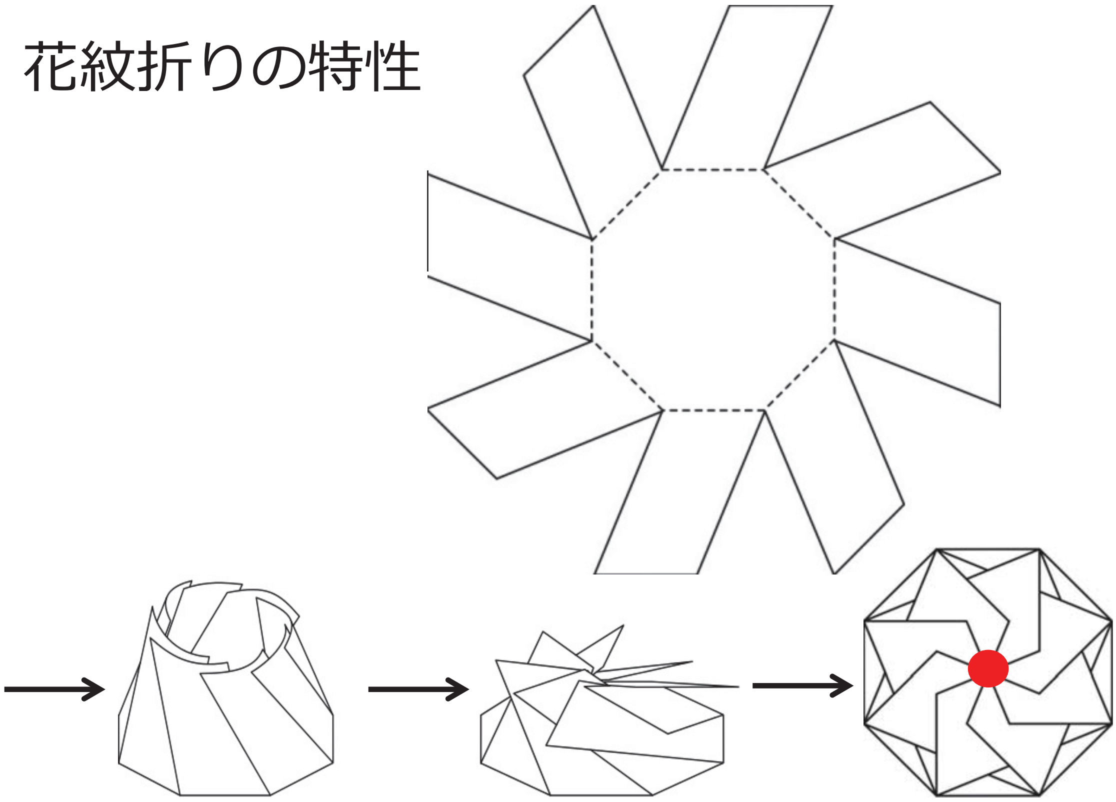
花紋折り（4角形）





「花紋折り」
の理論的(？)展開

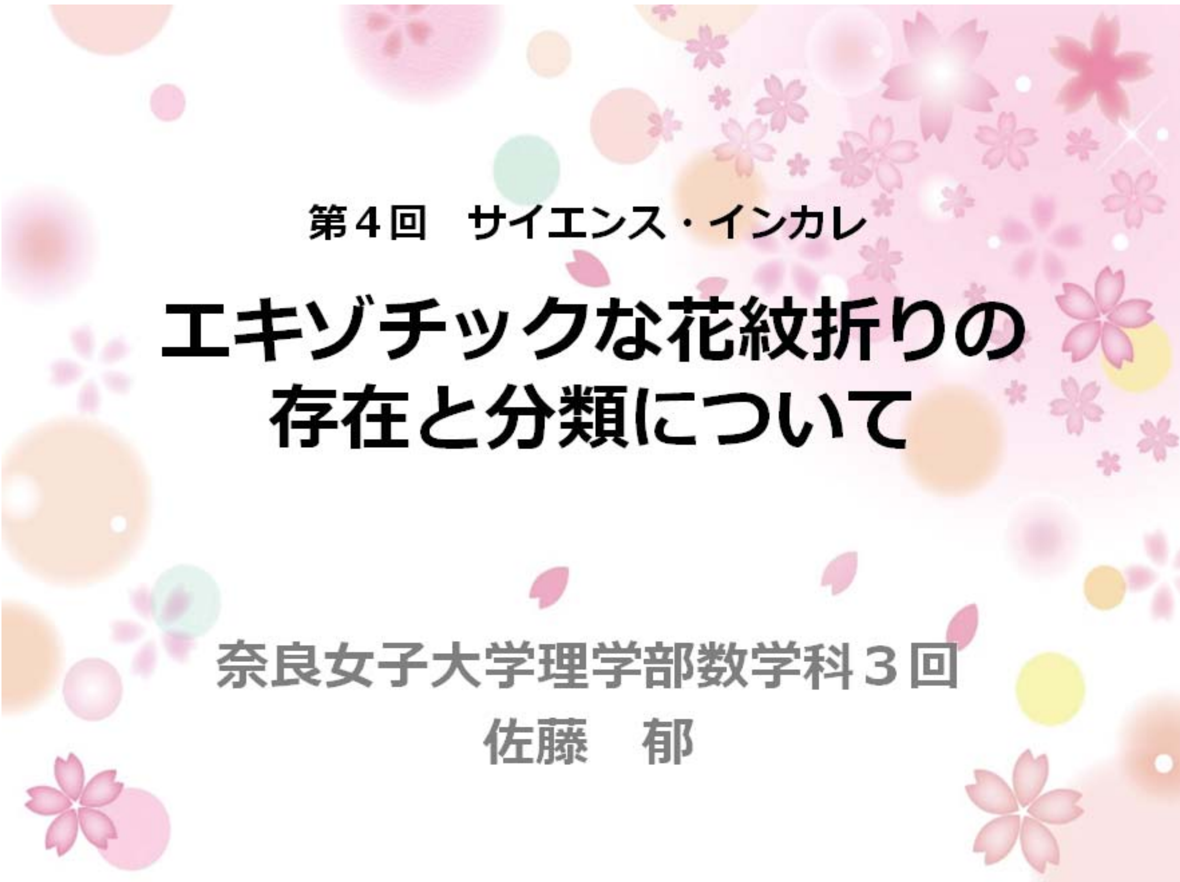
花紋折りの特性



問題設定

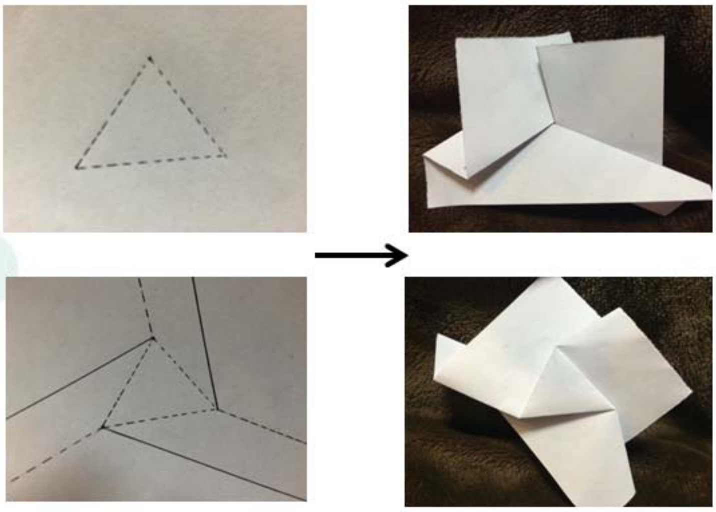
正n角形でないと
花紋折りは
できないのか


文部科学省
MINISTRY OF EDUCATION, CULTURE, SPORTS, SCIENCE AND TECHNOLOGY-JAPAN
お問い合わせ
文部科学省HP
サイトマップ
トップ > ようこそサイエンス・インカレへ
学生による自主研究の祭典
第5回 サイエンス・インカレ
ようこそサイエンス・インカレへ
第5回サイエンス・インカレ 開催概要
第4回サイエンス・インカレ 研究発表会のご報告
第4回サイエンス・インカレ ダイジェストムービー
わが校発！ サイエンス・インカレニュース
サイエンス・インカレへの道
リケジョ・インタビュー
プレゼンテーション データボックス
サイエンス・インカレへの期待
ようこそサイエンス・インカレへ
日本が将来にわたり、科学技術イノベーションを推進し、持続的に発展していくためには、課題設定能力、課題探求能力、プレゼンテーション能力を備えた次世代の科学技術を担う若者を育成していくことが必要であり、そのためには日頃の研究の成果について学生が切磋琢磨するとともに将来の研究活動へのインセンティブを沸き立たせる場を作ることが重要です。
しかし、現在のところ、大学学部の学生に対しては、このような機会が不足している状況にあると考えています。
これらの状況を踏まえ、学生の能力・研究意欲を高め、創造性豊かな科学技術人材を育成することを目的に、自然科学分野を学ぶ全国の学生が自主研究の成果を発表し競い合う場として、「サイエンス・インカレ」を平成２３年度から開催することとしました。
学生による自主研究の祭典
サイエンス・インカレ
研究発表会


第４回　サイエンス・インカレ
エキゾチックな花紋折りの
存在と分類について
奈良女子大学理学部数学科３回
佐藤　郁

結果｜三角形の場合

任意の三角形に対して，それを中心とする
エキゾチックな花紋折りが存在する.

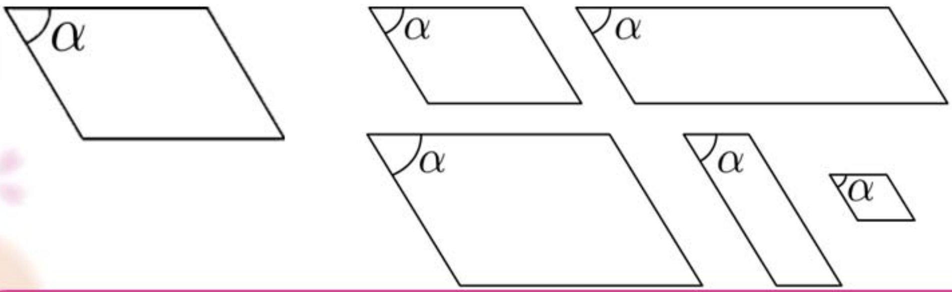


結果｜四角形の場合１

いま四角形は正方形ではない長方形とする.

この四角形からは,
エキゾチックな花紋折りを
つくることができない.

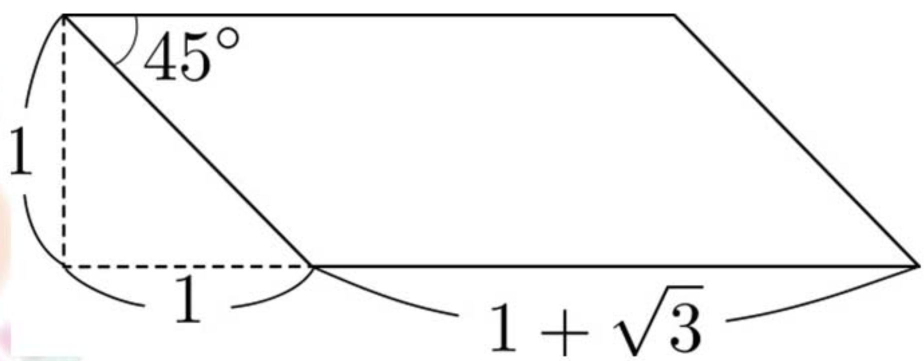
結果｜四角形の場合２



- 全ての$\alpha (0 < \alpha < 90)$に対して，
  １つの角がαの平行四辺形で
  エキゾチックな花紋折りをつくるものが存在する．

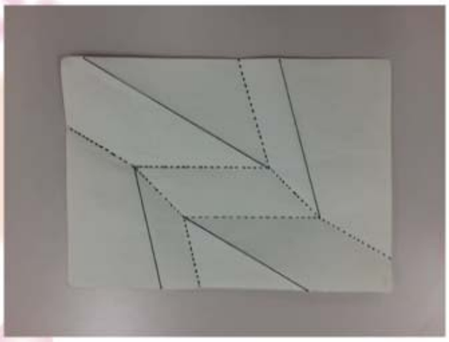
- そのような平行四辺形は全て相似になる．

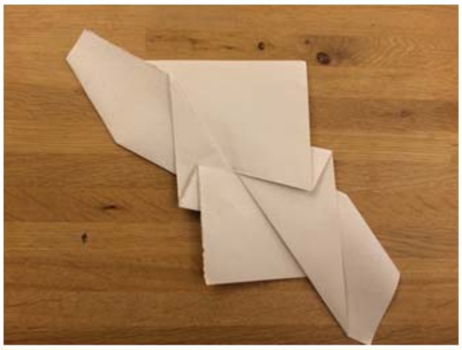
結果｜四角形の場合２

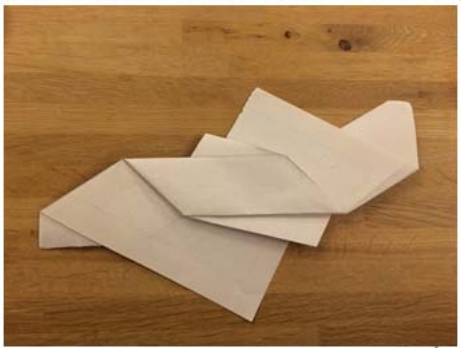


結果｜四角形の場合２

★ $\alpha = 45°$の場合



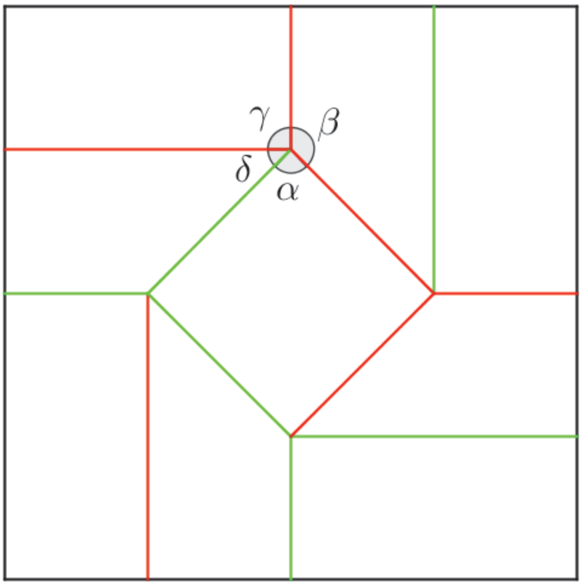




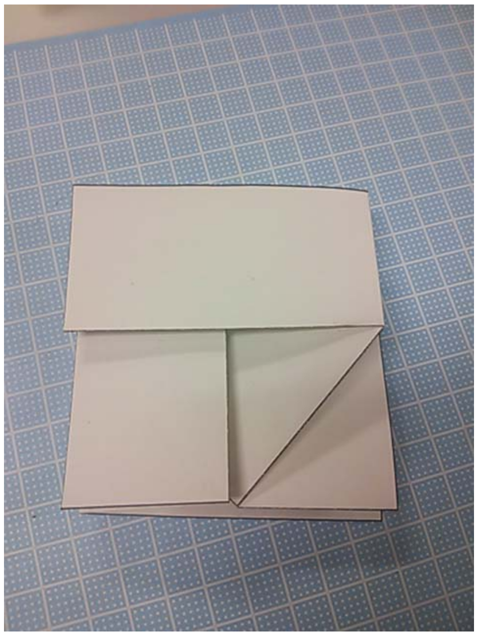
31/37

「花紋折り」の他の理論的展開

Square Twist（折り線のパターンは4角形の花紋折りと同じ）



$\alpha=\pi/2$, $\beta=3/4\,\pi$, $\gamma=\pi/2$, $\delta=\pi/4$



レポート問題

1. 「折り線のパターンが，4角形の花紋折りと同じ平坦折り」について調べよ.

例えば

・「花紋折り」「Squire Twist」以外のそのような平坦折りを見つけよ（この問題は必ずやってください．）

・そのような平坦折りをすべて見つけよ

2. 上に述べた2つ以外の「花紋折りの理論的展開」を考えよ