

## 科学の言語としての数学 「実験する数学」(第6回～第7回)

担当 川口 慎二(附属中等教育学校)

### 1. はじめに

みなさんにとって、「数学」とはどのような学問でしょうか？ 厳密な論理体系からなる論証と計算の学問だと思う人もいるでしょう。数学を研究する上で、予想を立ててそれを証明することは必要不可欠な作業です。しかし、「予想を立てる」段階ではさまざまな現象を観察したり、いろいろな実験を行ったりすることも必要です。このような実験や観察には、実際に手を動かし、実物を観ることだけではなく、コンピュータを用いた数値実験やシミュレーションなども含まれます。一方で、このような実験や観察を行うことにより、得られた数学的事実の意味や価値が確認できる場合もあります。

そこで、第4回から第7回では、中学校や高校ではあまり触れることのなかった数学を、実際に手を動かしながら考えてみようと思います。また、実験を通して実際の現象を数学的に表現することの意味や現実世界の事象への応用などについても触れてみたいと思います。

### 2. 「デタラメ」を実験する

世の中には、「偶然」や「デタラメ」がたくさんあります。例えば、1個のサイコロを振ったり、1組のトランプから1枚のカードを選んだり、さまざまな場面で「偶然」が起こります。その結果、「偶然」により選ばれた数字により、「デタラメ」な数字の列ができます。

ここでは、そのようにして得られた「デタラメ」な数字の列がどれくらい「デタラメ」なのかについて考えてみましょう。

#### 実験1

①1から6までの数字を思いつくままに、下の枠内に60個書き並べてみよう。


このように、人間が思いつくままに書き並べてできる乱雑な数字の列を**人工乱数**とよぶことにしましょう。

②①で書き並べた                      のなかに、ゼロ目がいくつあるか数えてみよう。ここで、「444」のように同じ数字が3つ並んだ場合はゼロ目が2個できていると考え、4個以上の場合も同様に考えることにします。

個

③次に、サイコロを 60 回振って 60 個の乱数をつくりましょう。これを「サイコロ乱数」と名付けることにします。①と同様に枠内に書き並べます。その前に、サイコロ乱数に現れるゾロ目の個数は②の個数より多いのでしょうか？それとも少ないのでしょうか？予想してみましょう。

- ⑦ほぼ同じくらいである  
 ⑧サイコロ乱数の方が、ゾロ目が多い  
 ⑨サイコロ乱数の方が、ゾロ目が少ない

予想


※サイコロがよく回転するように勢いよく投げましょう。投げ方が悪いと上面が出やすくなってしまいます。

④③で書き並べたサイコロ乱数のなかに、ゾロ目がいくつあるか数えてみよう。また、結果はどうであったでしょうか。

個

結果

⑤最後に GeoGebra の表計算機能を用いて、1 から 6 までの整数からなる乱数をつくり、ゾロ目の個数を数えてみよう。GeoGebra の表計算でセルに

個

=RandomBetween[1,6]

と入力してドラッグによりコピーすると、60 個の乱数ができます。

## 実験 2

①**実験 1**で得られた④人工乱数、⑤サイコロ乱数、⑥コンピュータの生成した乱数について、1 から 6 までの数字の表れた回数を数えてみよう。

②次に、**実験 1**では 1 から 6 までの 6 個の数字を考えているので、それぞれが同じ割合で現れるのであれば、10 個ずつ現れるはずです。そこで、数字  $j$  ( $1 \leq j \leq 6$ ) の表れた回数を  $a_j$  とする

とき、 $|a_j - 10|$  を「ゆらぎ」とよぶことにします。このとき、ゆらぎの程度を表すために、「ゆ

らぎの平均値」を  $S = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 (a_j - 10)^2}$  と定めます。

GeoGebra の表計算機能を利用して、④人工乱数、⑤サイコロ乱数、⑥コンピュータの生成した乱数について、ゆらぎの平均値を求めてみよう。

	数字	1	2	3	4	5	6
④	回数						
	ゆらぎ						
	ゆらぎの平均値は						
⑤	回数						
	ゆらぎ						
	ゆらぎの平均値は						
⑥	回数						
	ゆらぎ						
	ゆらぎの平均値は						

### 実験3

①GeoGebra の表計算機能を用いて、1 から 6 までの数字からなる 300 個の乱数を生成し、それぞれの数字が何回現れたかを数えて記録し、ゆらぎとゆらぎの平均値を計算してみよう。

数字	1	2	3	4	5	6
回数						
ゆらぎ						
ゆらぎの平均値は						

②さらに 300 個の乱数を生成し、合計 600 回のうち、それぞれの数字が何回現れたかを数えて記録し、ゆらぎとゆらぎの平均値を計算してみよう。

数字	1	2	3	4	5	6
回数						
ゆらぎ						
ゆらぎの平均値は						

※GeoGebra の表計算機能の他に、Excel を用いてもよい。

## ■数学的考察

一般に、いくつかの数字を、そのすべてが同じ確率で現れるように乱雑に並べた数字の列のことを**乱数**といいます。

**実験1**では、人工乱数が実は乱数になりにくいことを実感するとともに、ゼロ目や3回のゼロ目がそれぞれ10回、3～4回程度起こり得ることを再確認してほしいという意図で行いました。たと

えば、ゼロ目ができる確率は $\frac{1}{6}$ 、3個のゼロ目ができる確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$ であることから直ちに

わかります。

**実験2**では、ゆらぎという考え方を紹介しました。サイコロの1つの目が出る確率は $\frac{1}{6}$ ですから、60個の乱数の中には1から6の数字がそれぞれ10回ずつ現れることが期待できます。その期待される回数(この場合10回)と実際の回数の差の絶対値がゆらぎです。

また、「ゆらぎの平均値」とは、期待される回数を平均値とみたとき、それぞれの数字が表れる回数の平均値は $\sqrt{N}$ 程度になることが知られています。

つまり、期待される回数(つまり平均値)  $N$  に対するゆらぎの割合は、 $\frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$  となるため、期待される回数が大きくなるにつれて、ゆらぎの割合は0に近づいていきます。

このように、が大きくなるにつれてゆらぎが小さくなることから、サイコロを振る回数をどんどん増やしていけば、次第にそれぞれの目が出る確率は $\frac{1}{6}$ に近づいていくことになります。

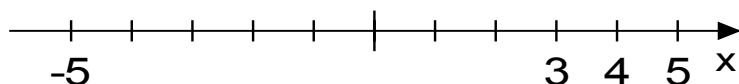
つまり、この**実験2**は「 $\frac{1}{6}$ 」を確認するための実験だったといえるのです。

## 3. 酔っぱらいを数学で観察する

さて、街で見かける「デタラメ」な様子といえば、酔っぱらいのお父さんが千鳥足でふらふらと歩いている場面もその1つといえます。お酒を飲んですっかり上機嫌のお父さんは、鞆を抱えて右にフラフラ、左にフラフラまっすぐ歩くことができません。そんな酔っぱらいの歩くさまも、乱数を用いて「デタラメ」を捉えることにより、数学的な法則性が見えてきます。

### **実験4**

①はじめに数直線上の原点  $O$  にいる酔っぱらいが数直線上を移動します。サイコロを振って、1, 2, 3の目が出たら右に1歩(+1)、4, 5, 6の目が出たら左に1歩(-1)動きます。この酔っぱらいが100歩歩くとどこにたどり着くか考えてみましょう。



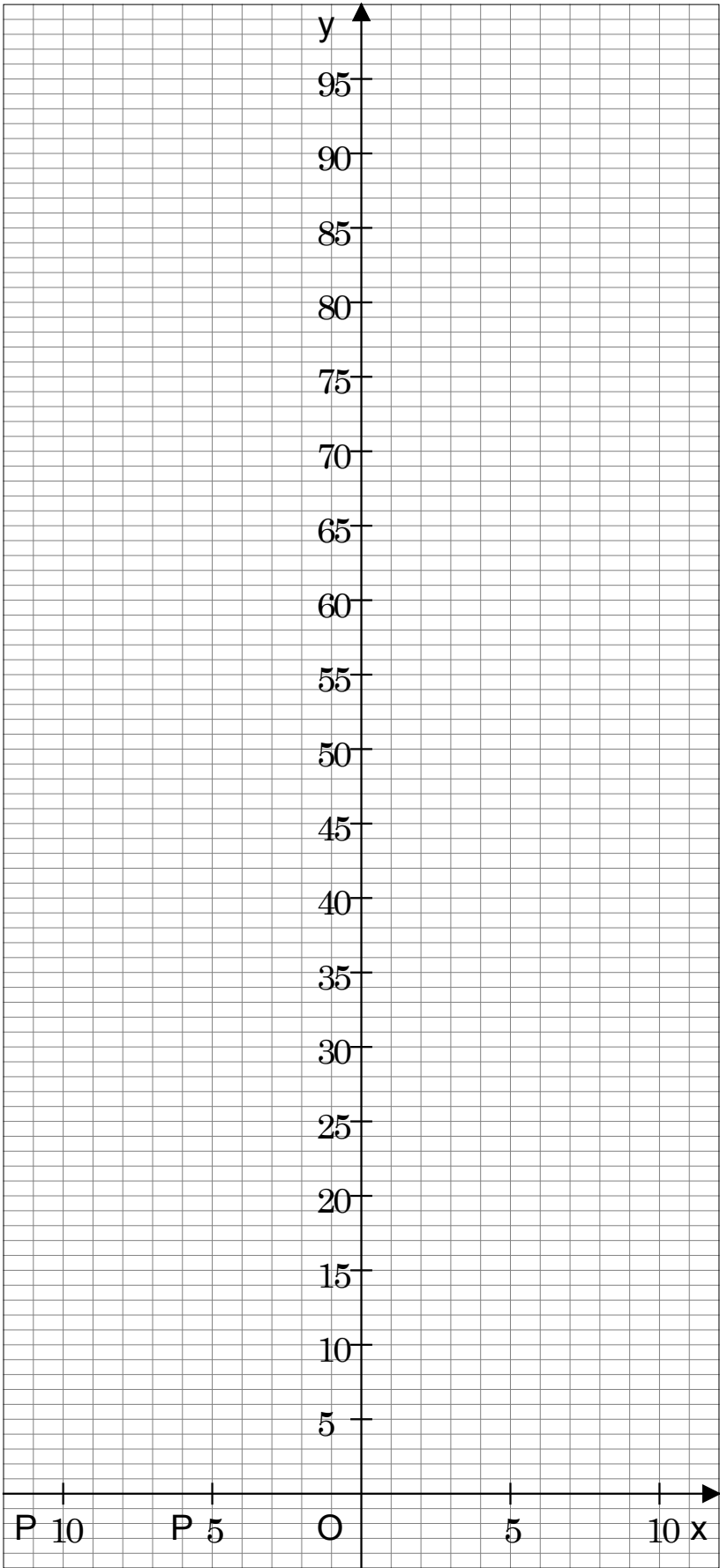
②サイコロの代わりに、Geogebra の表計算機能を用いて、1 から 6 までの数字からなる 100 個の乱数を生成して、1 歩ずつ酔っばらいの動く様子を表してみましょう。

※右図の  $x$  軸が数直線を表していて、 $y$  軸が回数(歩数)を示しています。

③酔っばらいの動きには規則性があるのでしょうか。考えてみましょう。

④次の歩数の場合の酔っばらいの位置( $x$  の値)を記録しておきましょう。

歩数	位置

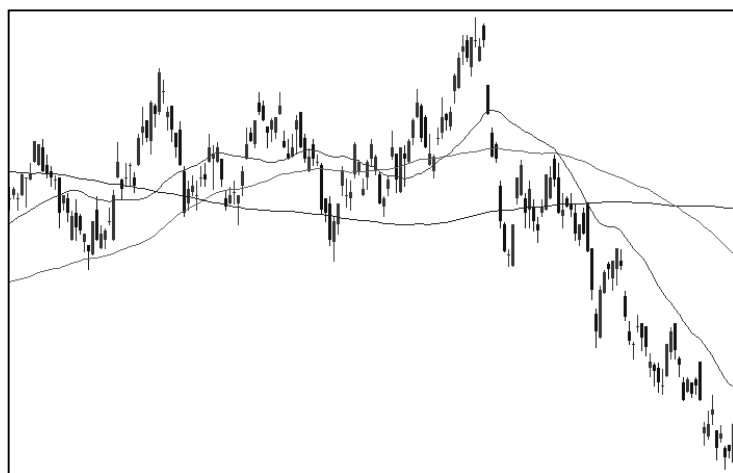
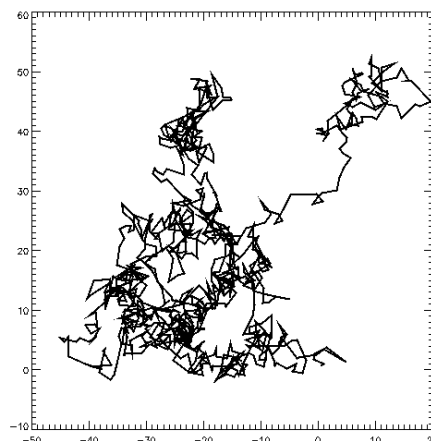


## ■ 数学的考察

**実験 4** の酔っばらいのように、物体(人や粒子など)が時間とともに移動する事象において、移動する方向(および距離)が確率とともに与えられており、時間とともにその動きを変えるような運動を「**ランダムウォーク**」といいます。特に**実験4**では、直線上を移動するので、**1次元ランダムウォーク**、または**直線上のランダムウォーク**といいます。また、酔っばらいの移動に例えられるため、1次元ランダムウォークの問題を「**酔歩問題**」とよぶこともあります。

ランダムウォークは、もともと「**ブラウン運動**」(水に浮かぶ花粉の不規則な運動)をモデル化したものであり、情報の伝達や物質の流れの解析にも応用されています。

ランダムウォークが現れる現象は自然や社会にも非常に多く、気体分子の運動や株価、為替相場の変動などが挙げられます(詳しくは後述します)。



1次元ランダムウォークの例として、「**ギャンブラーの破産問題**」とよばれるものがあります。

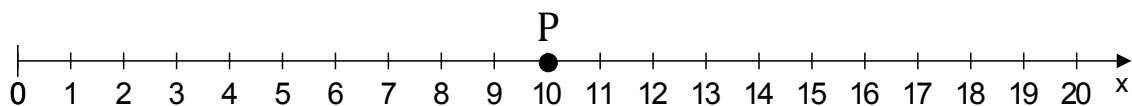
### **実験5**

①2人のギャンブラーAとBが10枚ずつコインをもっています。1枚のコインを投げ、表が出たらAはBにコインを1枚渡します。裏が出たらBがAにコインを1枚渡します。これを繰り返して、どちらかのコインがなくなったら終了です。

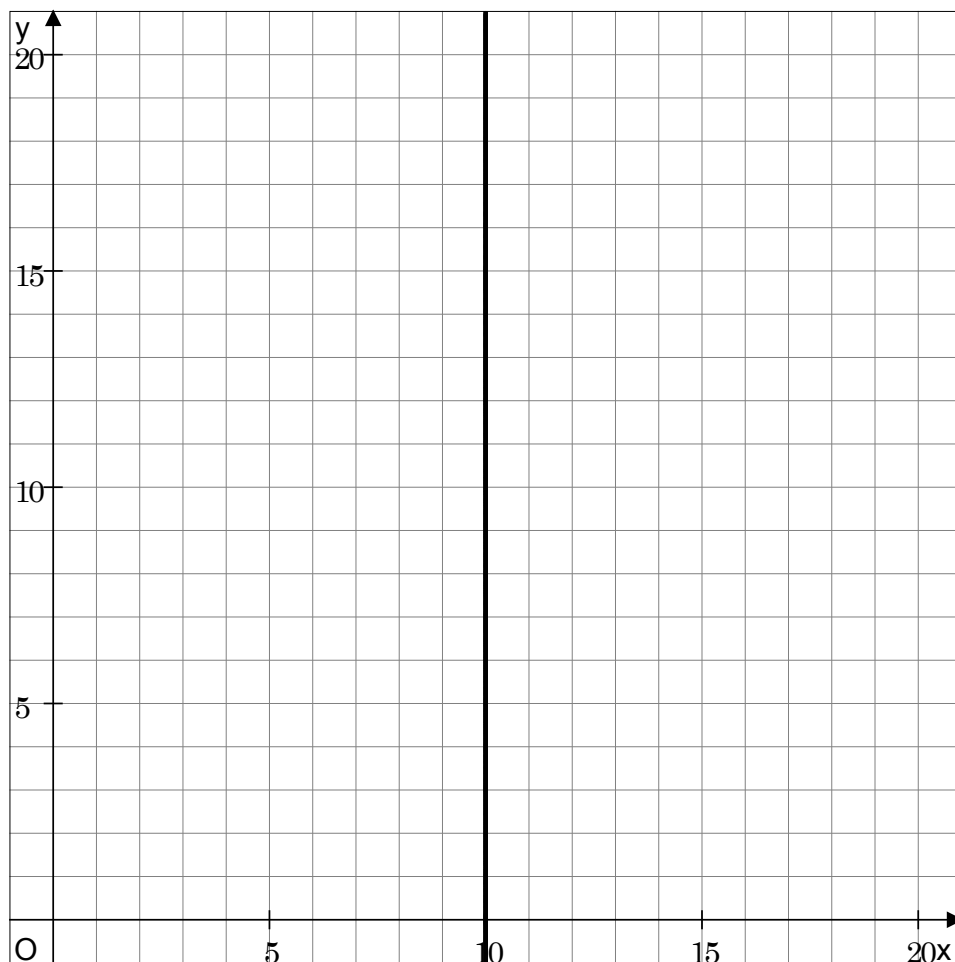
②①の設定をランダムウォークで考えてみよう。いま、Aの持っているコインの枚数を数直線上の動点Pとして表すことにすると、点Pははじめに                      の位置にあり、

- ・コインが表のとき、動点Pは
- ・コインが裏のとき、動点Pは
- ・動点Pが0の位置にくると、
- ・動点Pが20の位置にくると、





③20 回まで繰り返してみましょう。途中でどちらかが破産すれば終了です。20 回までにどちら  
も破産しない場合は、20 回終了時の A の持ち金を記録しましょう。



#### ■数学的考察

**実験 4** と **実験 5** では、ともに 1 次元ランダムウォークの問題です。これらの実験から、1 次元ラ  
ンダムウォークでは、移動(試行)回数を  $n$  とするとき、移動距離は  $\sqrt{n}$  に近いことに気がきます。  
この理由も「ゆらぎ」の考え方で説明することができます。

いま、+1 進む確率と -1 進む確率が等しいので、 $n$  回のうち、 $\frac{n}{2}$  回が右へ進み、 $\frac{n}{2}$  回が左へ進  
むことが期待できます。ところが、「デタラメ」に移動しているので、左右の進む回数にゆらぎが

生じます。先程も述べたように、そのゆらぎの平均値は $\sqrt{\frac{n}{2}}$  です。ここで、左に進む回数が多い

と、右へ進む回数が少なくなるため、このゆらぎは 2 倍となり、動点が進む距離は $\sqrt{\frac{n}{2}} \times 2 = \sqrt{2n}$  と

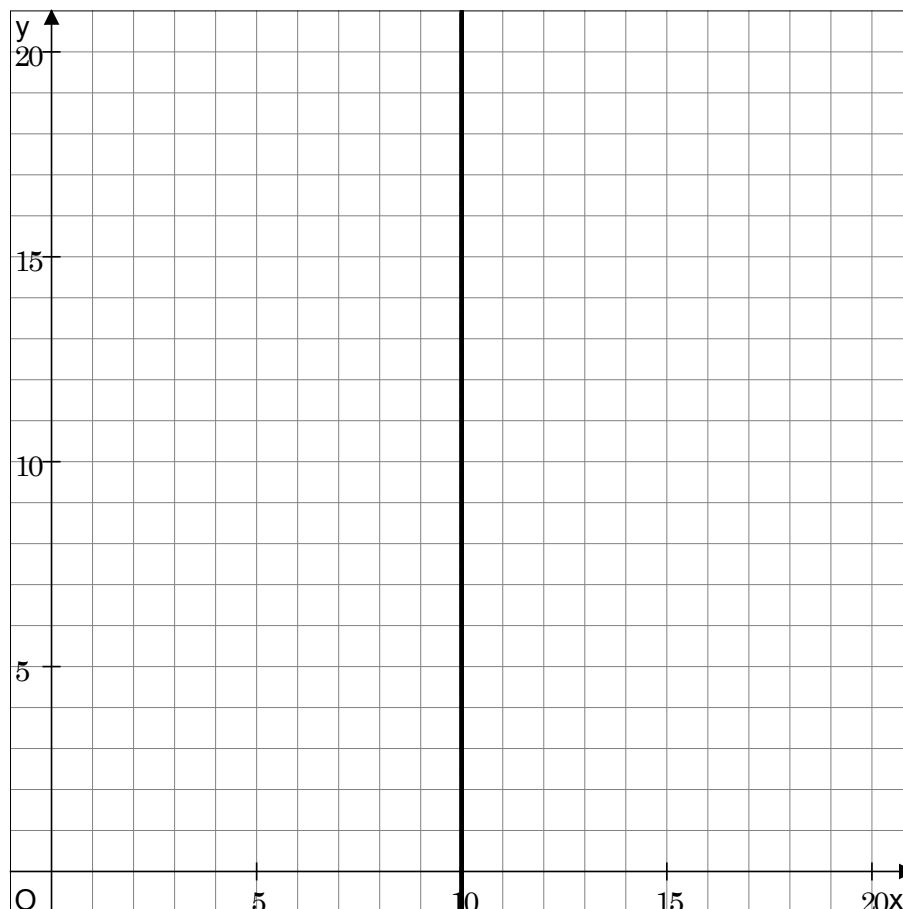
なります。 $\sqrt{2} \div 1.414$  より、ほぼ $\sqrt{n}$  に近くなるというわけです。

#### 実験6

**実験5**において、A と B のはじめの所持金と 1 回のコインの移動する確率(賭けの勝率)を変えてみましょう。

①2 人のギャンブラーA が 5 枚、B が 10 枚のコインをそれぞれもっています。サイコロを 1 個投げ、5 以上の目が出たら A は B にコインを 1 枚渡します。4 以下の目が出たら B が A にコインを 1 枚渡します。これを繰り返し、どちらかのコインがなくなったら終了です。

②①の状況を、ランダムウォークを用いて 20 回まで繰り返してみましょう。途中でどちらかが破産すれば終了です。20 回までにどちらも破産しない場合は、20 回終了時の A の持ち金を記録しましょう。





## ■数学的考察

**実験6**では、**実験5**のときと比べて、はじめの所持金額とコインの移動確率を変えてみました。一般に、ギャンブラーの破産問題について、次の事実が知られています。

- ・ギャンブラーAのはじめの所持金が  $a$  で、1回の賭けにおける勝率が  $p$  ,
  - ・ギャンブラーBのはじめの所持金が  $b$  で、1回の賭けにおける勝率が  $1-p (=q)$
- とすると、AがBを破産させる確率は、どちらかが破産するまで繰り返した場合、

$$\frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}} \quad \left(p \neq \frac{1}{2} \text{のとき}\right), \quad \frac{a}{a+b} \quad \left(p = \frac{1}{2} \text{のとき}\right)$$

で与えられます。

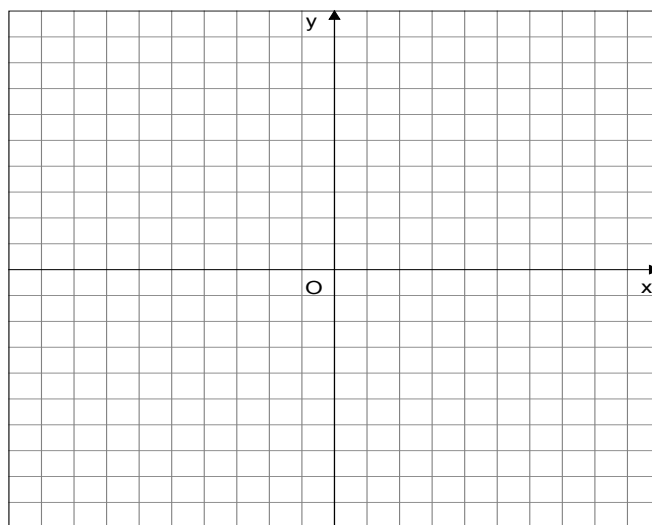
ランダムウォークにおいて、ギャンブラーの破産問題ではどちらかが破産すると終了となります。これを「**吸着**」といいます。また、酔歩問題で一方を壁にしてそれ以上進めないようにすると、壁に当たって戻ってきます。これを「**反射**」といいます。また、ある位置に達すると留まるという状態の「**滞留**」も起こり得ます。これらはランダムウォークの「**境界条件**」といわれる重要な条件なのです。

## 4. 2次元ランダムウォーク

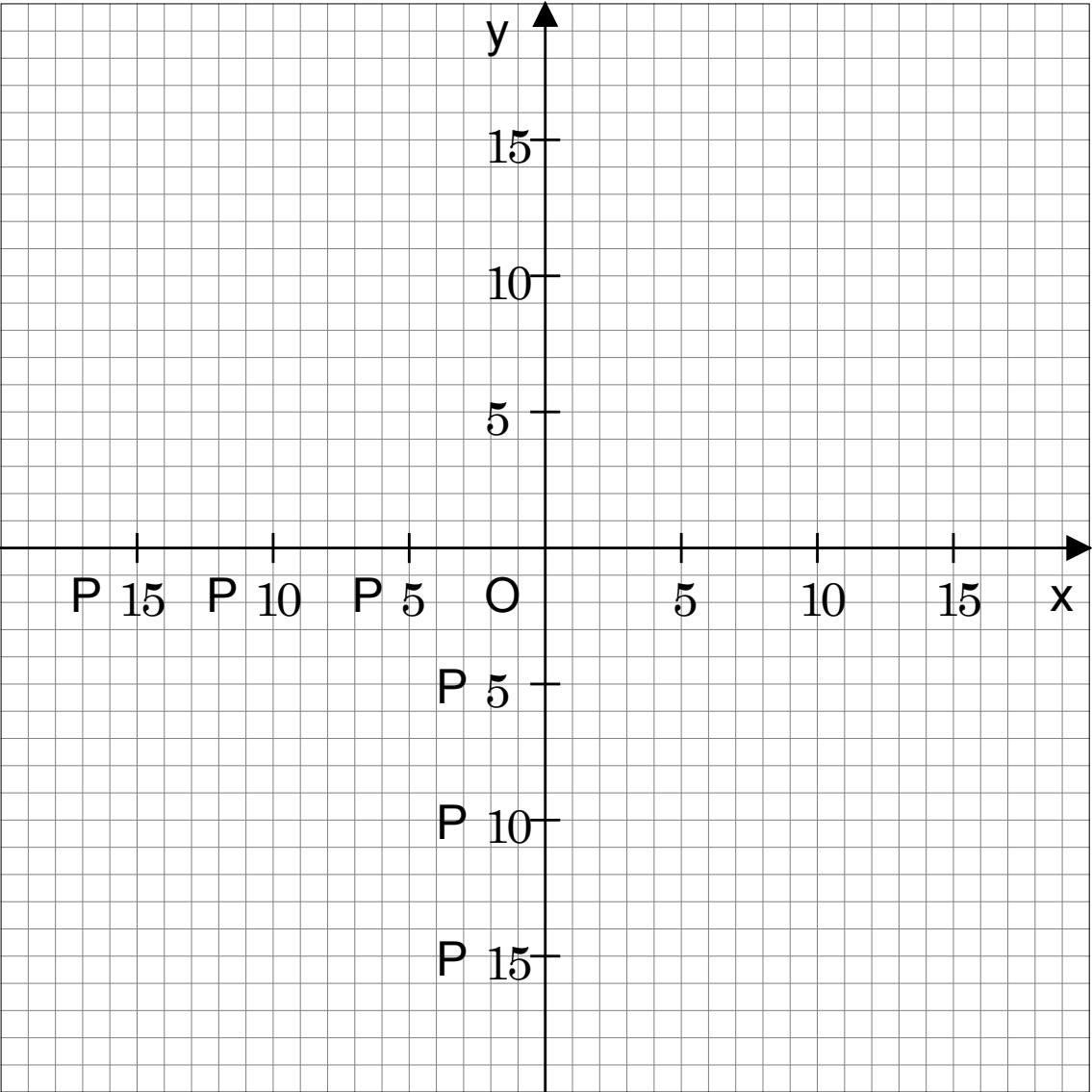
京都の街はまるで碁盤の目のように町が分けられています。京都の街を歩く酔っぱらいはまるで座標平面上をウロウロ回っているかのようです。

### **実験7**

- ①はじめに座標平面上の原点  $O$  にいる酔っぱらいが座標平面上を移動します。1から4までの乱数をつくり、1が出たら右に1歩、2が出たら左に1歩、3が出たら上に1歩、4が出たら下に1歩動きます。この酔っぱらいは40歩歩くとどこにたどり着くか考えてみましょう。



②サイコロの代わりに、Geogebra の表計算機能を用いて、1 から 4 までの数字からなる 40 個の乱数を生成して、1 歩ずつ酔っばらの動く様子を表してみましょう。



③酔っばらの動きには規則性があるのでしょうか。考えてみましょう。

④次の歩数の場合の酔っばらの位置(座標)を記録しておきましょう。また、原点からその点までの距離を求めましょう。

歩数						
位置						
距離						

## ■数学的考察

**実験7**では、2次元ランダムウォークの問題です。これらの実験から、2次元ランダムウォークでは、移動(試行)回数を $n$ とすると、原点から動点Pまでの距離は $\sqrt{2n}$ に近いことに気がきます。この理由も「ゆらぎ」の考え方で説明することができます。

いま、 $n$ 回の移動のうち、 $\frac{n}{2}$ 回が左右へ進み、 $\frac{n}{2}$ 回が上下へ進むことが期待できます。「デタラメ」に移動しているので、左右の進む回数にゆらぎが生じます。1次元のランダムウォークで説明したように、左右の移動のゆらぎの平均値は $\sqrt{2 \times \frac{n}{2}} = \sqrt{n}$ です。つまり、左右の移動分はほぼ $\sqrt{n}$ に近くなります。また、上下の移動についても、左右の移動とまったく同じことがいえて、上下の移動分も $\sqrt{n}$ に近くなります。このとき三平方の定理から、原点から動点までの距離は $\sqrt{2n}$ に近くなります。

## 5. ゆらぎとランダムウォークの応用例

ゆらぎの応用としては誤差評価などが、ランダムウォークの応用例としては、ブラウン運動のシミュレーション、粒子の運動のシミュレーション、うわさ話の伝播、感染症の伝播、株価の変動などが挙げられます。それぞれ1つずつ紹介しておきましょう。

### ①ゆらぎの応用「誤差評価」

実験において、測定は重要な要素です。より正確に測定することにより、現象を正しく捉えることができます。しかし、測定には人間がコントロールすることが難しい誤差が生じてしまいます。室内温度、測定器具のガタツキ、人の動きによる空気の流れ、車の通る振動などさまざまな要因が考えられます。これらの要因による誤差を排除するためには、何度も繰り返し測定することが必要になります。

例えば、重さが $W$ である物体の重さを測定するとき、測定値の誤差 $\Delta W$ が生じるとします。つまり、測定の度に測定結果は $W + \Delta W$ あるいは $W - \Delta W$ となります。測定を $n$ 回行った場合、 $+\Delta W$ の誤差と $-\Delta W$ の誤差の生じる回数は半分ずつではなく、一方がゆらぎのため $\sqrt{n}$ 程度多くなります。 $+\Delta W$ の誤差の方が $\sqrt{n}$ 回多く生じたとすると、 $n$ 回の測定結果の平均は

$$\frac{nW + \sqrt{n}\Delta W}{n} = W + \frac{\Delta W}{\sqrt{n}}$$

となります。したがって、 $n$ 回の測定結果の平均値は、 $\frac{\Delta W}{\sqrt{n}}$ だけ大きくなります。同様に、 $-\Delta W$

の誤差の方が $\sqrt{n}$ 回多く生じたとすると、 $n$ 回の測定結果の平均は $\frac{\Delta W}{\sqrt{n}}$ だけ小さくなります。

どちらにせよ、測定回数 $n$ が多いほどずれが小さくなり、正確な測定値に近づきます。

## ② ランダムウォークの応用「粒子の運動のシミュレーション」

空気中に分散する PM2.5 のような微小なちりや車の排気ガスから排出される窒素化合物などの分子は、空気分子と衝突を繰り返しながら、絶えず乱雑に運動しています。つまり、空気中でランダムウォークをしていると考えられます。

ランダムウォークをする回数 $n$ は時間 $t$ に比例するため、 $n = pt$  ( $p$  は温度が高いと大きくなります)とかけます。このとき、微小物質がもとの位置から移動した距離は、

$$\sqrt{2n} = \sqrt{2at}$$

となります。したがって、微小物質がもとの位置から移動した距離は $\sqrt{t}$ に比例します。つまり、時間の経過とともに長くなります。微小物質が移動する方向は空間内の全方向であるから、微小物質のランダムウォークは、球形領域に広がり、球の半径が $\sqrt{t}$ に比例して大きくなるのがわかります。このようにして、微小物質や分子の分布が広がっていく様子を「拡散」といいます。

## ■ 参考文献、参考 HP

- [1] 「楽しい数理実験」、高木隆司、講談社
- [2] 「ランダムウォークの話」、深川久

## 6. 課題 I

- [1] 座標平面上の原点  $O$  に動点  $P$  があります。0 から 9 までのカードから 1 枚選び、1, 2 なら左に、3, 4 なら下に、5, 6 なら右に、7, 8 なら上にそれぞれ 1 だけ移動します。9, 0 のときは立ち止まります。この操作を 50 回繰り返すときの動点  $P$  の位置をシミュレーションしましょう。
- [2] 2 人のギャンブラー  $A, B$  がいます。はじめの所持金は  $A$  が \$8,  $B$  が \$12 であり、1 回あたりの賭けの勝率は  $A$  が 70%,  $B$  が 30% です。
  - (1) 5 回賭けを行うとき、 $A$  の所持金がいくらになっている確率が高いでしょうか。計算してみましょう。
  - (2) (1) の 5 回勝負を 5 回繰り返します。乱数を用いたシミュレーションを行い、(1) の結果と比較してみましょう。

## 科学の言語としての数学 「実験する数学」 (第8回)

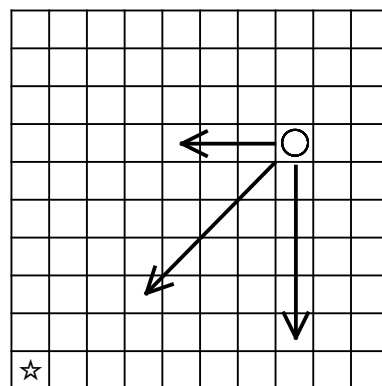
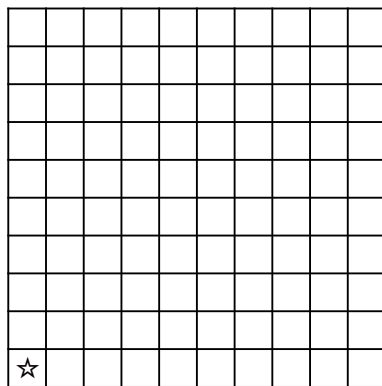
担当 川口 慎二 (附属中等教育学校)

### 7. ゲームに潜んでいる数学

今回は、ゲームの必勝法に関する考察をしてみましょう。数学とどんな関係があるのでしょうか。

#### 実験8

- ①  $10 \times 10$  の盤と駒 1 個を用意します。
- ② 先攻と後攻を決め、先攻は盤の網掛けの部分のどこかに、駒を置きます。
- ③ 後攻は先攻の置いた位置から、左、左斜め下、下のいずれかの方向に好きなだけ駒を動かすことができます。
- ④ これを先攻と後攻が繰り返し、先に☆のついたマスに駒を置くことができた方の勝ちとします。



- ⑤ まずは、何回か実際に対戦してみましょう。先攻と後攻を交代したり、相手を変えたりしてみましょう。このとき、先攻と後攻のどちらが勝ちやすいのでしょうか。

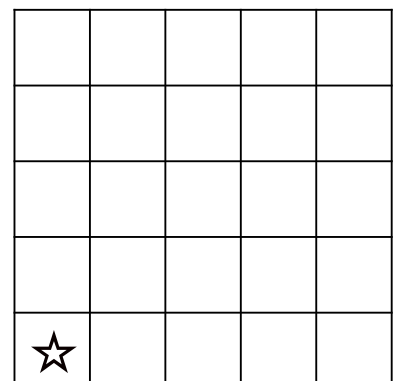
【予想】 のほうが勝ちやすい。

#### ■ 数学的考察

ここでは、**実験8**で行ったゲームの必勝法を考察してみることにしましょう。

そこで、はじめに、盤のマス目を少なくして考えてみることにします。 $5 \times 5$  の盤で考えてみます。最短で 手、最長で 手でゲームは終わります。

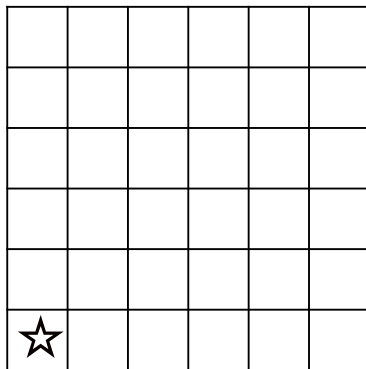
あなたが先攻であるとしてます。まず、×の位置には駒を置いてはいけません。



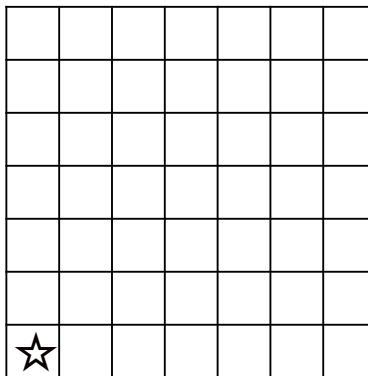
# 実験9

①マス目の数を1つずつ増やして、先攻の必勝法の有無を調べてみましょう。

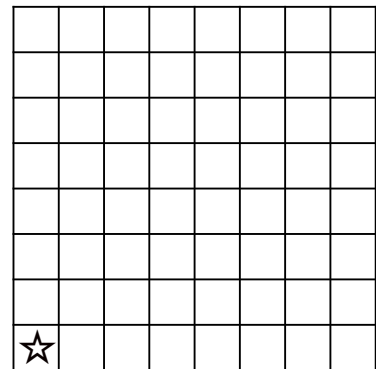
6×6



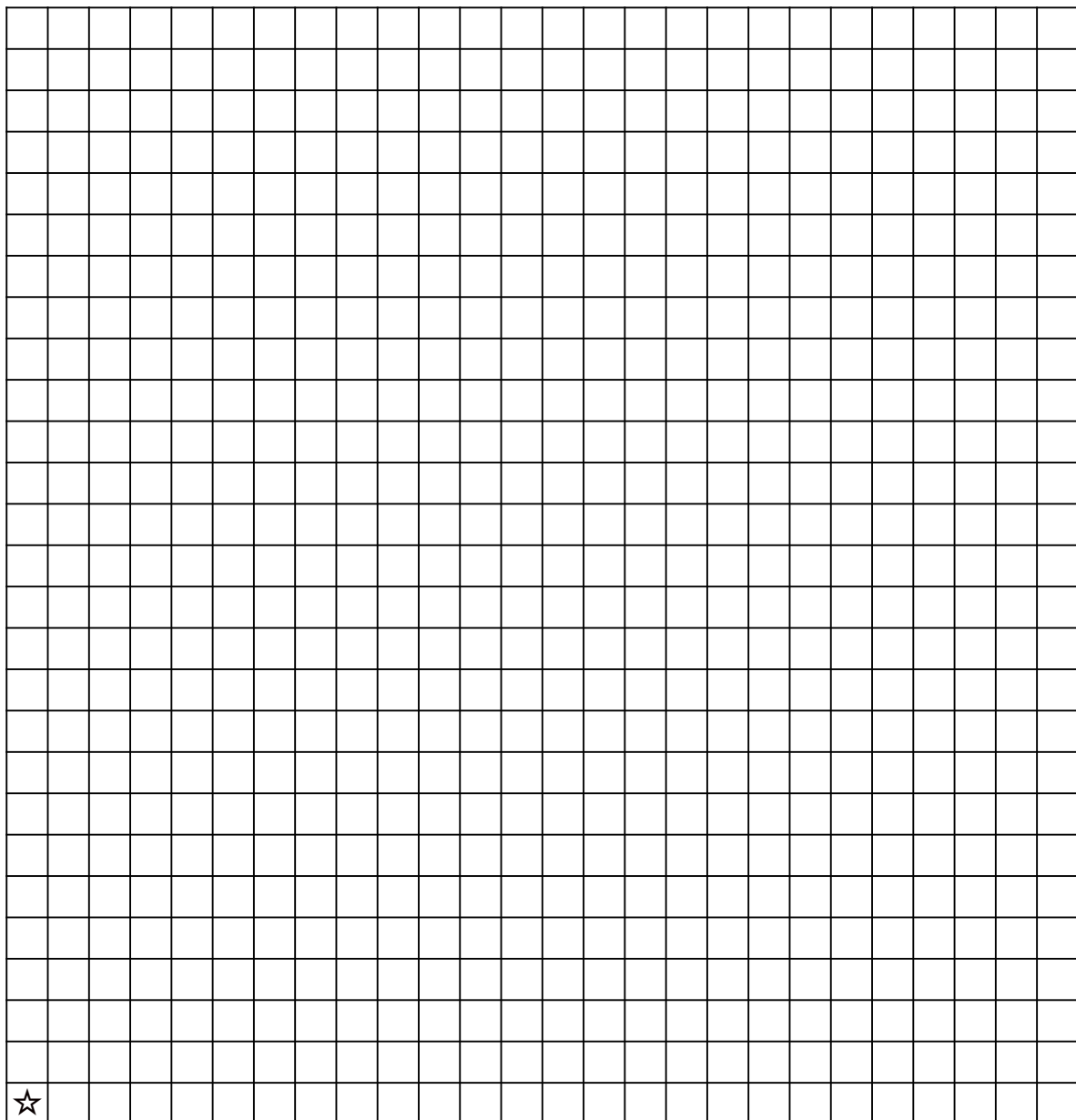
7×7



8×8



②①を調べてみると、より効率的な方法に気がきます。下の盤は 27×27 です。



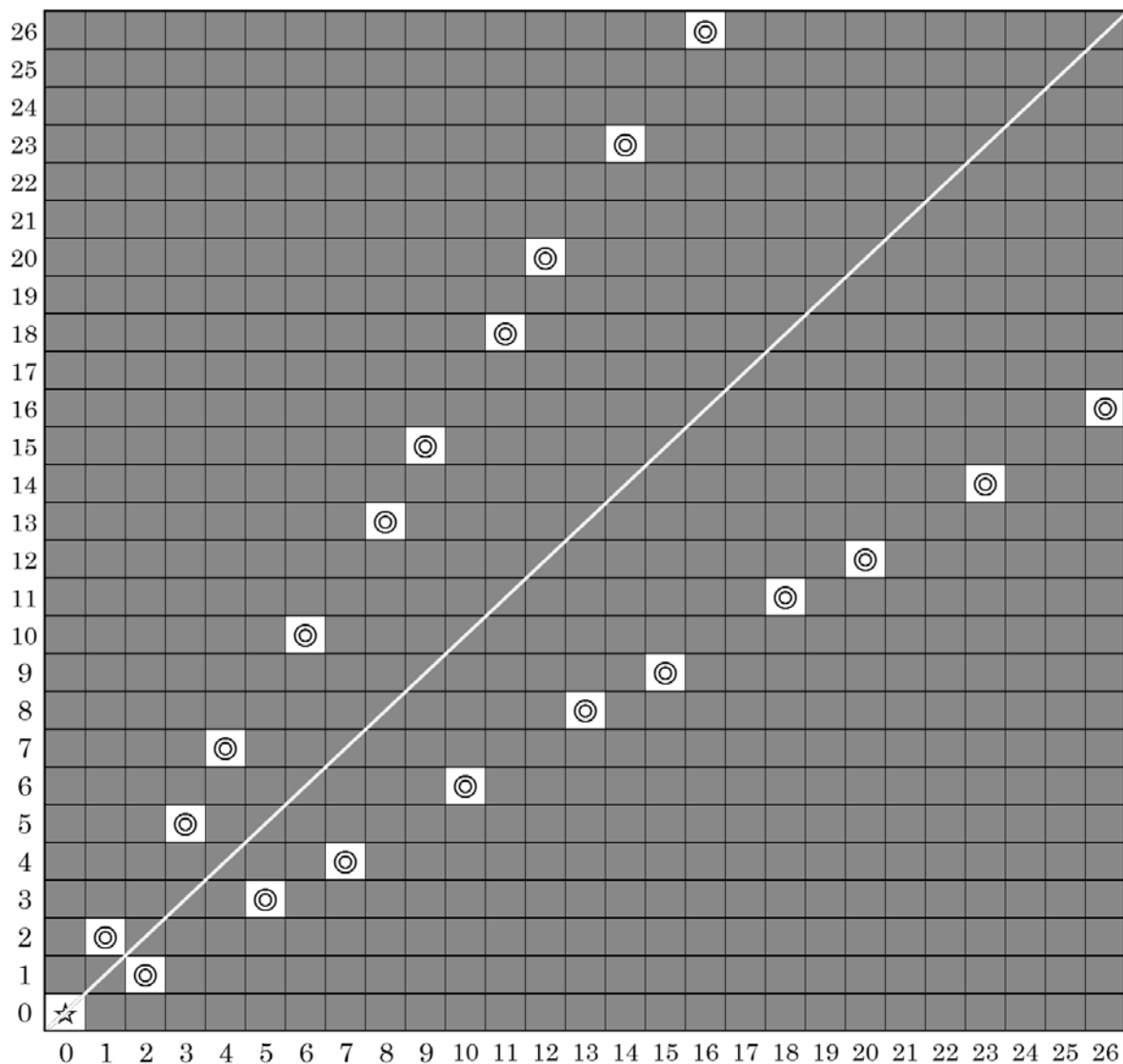
③先攻に必勝法がある盤の一边のマス目の数 $n$ は

$$n =$$

であることがわかります。

#### ■数学的考察

**実験9**から、盤の一边のマス目に応じて、先攻に必勝法がある場合と、必ず後攻が勝つ場合に分かれることがわかりました。さらに、図の◎の位置に先攻が駒を置くことができれば、後攻に☆へ駒を進められる心配がなく安全です。そこで、◎の入っているマスを**安全位置**と呼ぶことにします。



実際に、先攻が安全位置◎を押さえながら駒を進めると、後攻は☆にたどり着くことができず、先攻の勝ちとなることが確認できます。

つまり、◎が盤の上辺と右辺に現れない場合に先攻は必ず負けます。逆に、盤の上辺または右辺に安全位置◎が現れる場合、先攻に必勝法があることになります。

数学的な議論のために、マス目の左下の角のマスを基準として、盤の下辺と左辺に 0 から番号を振ります。すると、盤上のマス目は座標のように  $(m, n)$  と 0 以上の整数の組で表すことができます。囲碁や将棋と同じ感じですね。このとき、安全位置についてわかることがいくつかあります。

**①各列に安全位置は**

【理由】

**②各列に安全位置は**

【理由】

**③安全位置は盤の対角線上にはなく、盤の対角線について**

【理由】

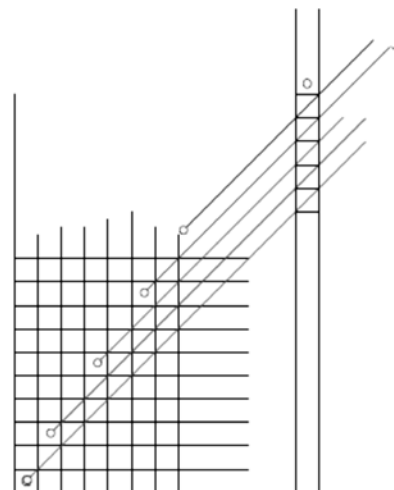
そこで、盤の対角線の上側のみを考えて、組の前の数字が小さい方から  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$  とすると、下表のようになります。

[表 1]

$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_j$										
$y_j$										

**④各  $j = 1, 2, 3, \dots$  について、  $y_j =$**

【理由】





[表 1]はこれらの規則①～④により、埋まります。しかも、

[表 1]には

ことに気付いたでしょうか。

## ■数学的背景

上の事実には、次の定理があります。

### 定理

$\alpha, \beta$  は無理数であり、 $\alpha, \beta > 1$  かつ  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$  が成り立つとする。

このとき、数列

$$[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \dots, [n\alpha], \dots, \quad [\beta], [2\beta], [3\beta], \dots, [n\beta], \dots,$$

の中には、すべてに自然数が 1 回ずつ現れる。

では、今回のゲームの場合、上述の定理の  $\alpha, \beta$  に相当する無理数とは何でしょうか。実は

が関係しているのです。

いま、 $\alpha = \phi, \beta = \phi^2$  とすると、定理の条件を満たしています。[表 1]では、

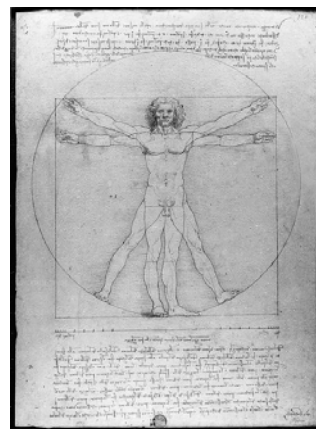
$$x_j = \quad, \quad y_j =$$

という数列ができていることになります。

### 【参考】黄金比

あなたが「美しい」と思うのは、一体何を見たときでしょうか。美術館の絵画を見たとき、山の頂から登る朝日を見たとき、紺碧の空の下で鮮やかなコバルトブルーの海をみたときなど、人それぞれ「美しい」と感じるものは異なります。人々が感じる「美しさ」の中には共通性を数学的に捉えようとして考えられてきたのが「黄金比」ともいえます。

右図は、イタリアのルネサンス期を代表する科学者、芸術家そして発明家として有名なレオナルド・ダ・ヴィンチ (Leonardo da Vinci, 1452–1519) による「ウィトルウィウスの人体図」と呼ばれる作品です。1490 年頃のダ・ヴィンチのノート「プロポーションの法則」のなかに現れます。古代ローマ時代の建築家ウィトルウィウスは、紀元前 1 世紀に人体の比率をもとに独自の建築理論を作り上げました。その著



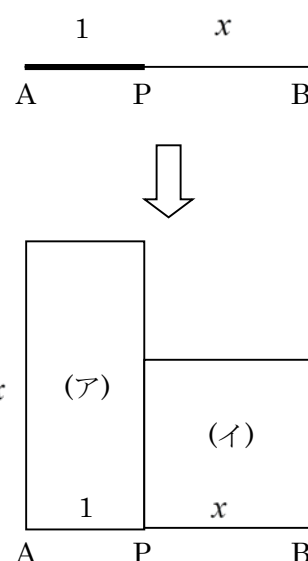
者「建築十書」にある「人体は円と正方形に内接する」という記述を表したものであり、映画「ダ・ヴィンチコード」の中にも登場し、イタリアの1ユーロ硬貨のデザインにも用いられている図として有名です。

ダ・ヴィンチは、絵画、彫刻、建築、土木、機械、解剖学など幅広い分野で業績を残し、「万能人(uomo universale)」と呼ばれる人物です。絵画では、「最後の晚餐」や「モナ・リザ」などの作品で、建築では橋の設計、発明では機関銃や潜水艦、自動車や飛行機などの機構で有名です。数学の分野では、ダ・ヴィンチは「黄金比」を発見したことで有名であり、実際に、「ウィトルウィウスの人体図」にも黄金比は隠されています。

ユークリッドの著書「原論」の中には、次のような命題があります。

線分を2つに分けなさい。小さい部分と全体でできる長方形と大きい部分でできる正方形の面積が等しいとき、小さい部分と大きい部分の比を求めよ。

いま、長さが1である線分ABがあります。上の命題にあるように、この線分を大小2つの部分APとPBに分け、 $AP=1$ ,  $BP=x$ としましょう。命題の条件から、横が1、縦が全体( $=1+x$ )の長方形(ア)と一辺が $x$ である正方形(イ)の面積が等しいので、 $1+x=x^2$ という関係式が成立し、この2次方程式を解くと、 $1 < x$ であるから、 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を得ます。したがって、小さい部分と大きい部分の比は $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であり、この比を**黄金比**(golden ratio)といいます。 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \div 1.61803\cdots$ ですが、およそその値として、黄金比は5:8と計算される場合もあります。

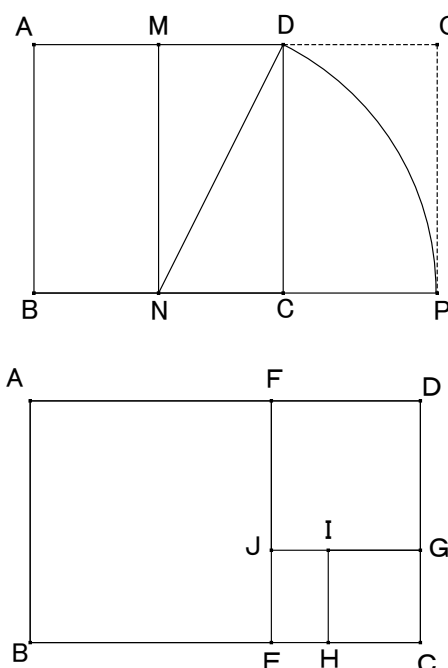


黄金比は次のような作図により得られます。

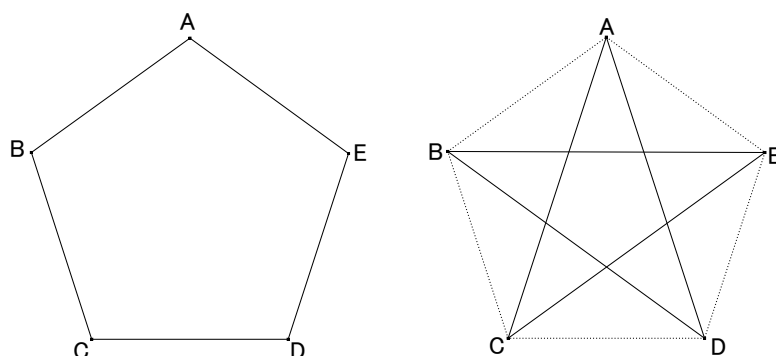
- ①正方形ABCDをかき、辺AD, BCの中点をM, Nとします。
- ②右側の長方形MNCDの対角線NDを引きます。
- ③Nを中心、NDを半径とする円弧とBCの延長の交点をPとします。
- ④このとき、 $AB:BP$ が黄金比になります。

$AB=1$ として、 $AB:BP$ が黄金比になることを確かめてみてください。

長方形ABPQは縦:横が黄金比になっています。このような長方形のことを「**黄金長方形**」といいます。また、与えられた線分ABを $AP:PB$ が黄金比になるような点Pで分けることができます。このような操作を「**黄金分割**」といいます。面白い性質のひとつとして、「黄金長方形から正方形を切り取



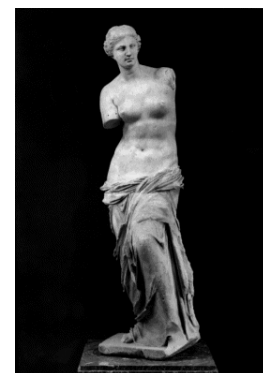
っても黄金長方形が残る」ことが知られています。黄金比は長方形の中だけではなく、五芒星(ペンタクル)にも隠されています。五芒星は 4000 年以上前に登場した最古の象徴記号といわれ、ピタゴラス教団の象徴でもありました。五芒星は霊的作用があるとして、西洋の呪術師や日本の陰陽師らが用いていました。この正五角形や五芒星にも黄金比が隠れています。いま、正五角形の一辺の長さを 1 とすると、五芒星において  $AC=BD=CE=DA=EB=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  となります。



黄金比は、建築や絵画において様々な場面で現れているといわれています。有名なのがギリシャにあるパルテノン神殿です。古代ギリシャ時代にアテナイのアクロポリスの丘に建造された神殿であり、現在は世界遺産になっています。パルテノン神殿はその縦横比(この比を「アスペクト比」といいます)がほぼ黄金比に等しくなっているといわれています。



美術についても、黄金比が現れてくるものが多いといわれます。左は、ダ・ヴィンチの代表作「モナ・リザ」です。右は、フランスのルーブル美術館に所蔵されている「ミロのビーナス」と呼ばれる彫像です。紀元前 130 年ごろに製作され、ミロス島から発見されたものです。このプロポーションにも黄金比が隠されているといわれています。

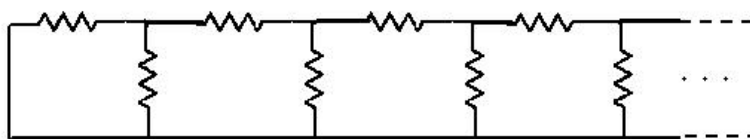


さらに、次のように無限に続く分数のことを**連分数**といいます。この連分数  $g$  は黄金比を表しています。さらに、連分数と同じように、根号(ルート)を無限に続けるという考え方をを用いて、黄金比は表現することができます。

$$g = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$g = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

なぜ、こういった分数や根号を「無限に続けた」ものが黄金比を表すのでしょうか。そこには無限の秘密が隠されています。このような話題はさらに広がりを見せます。下図のように、それぞれが  $1\Omega$  である抵抗を規則的に並べたときの全体の抵抗値(合成抵抗値)を考えてみると、



オームの法則から回路全体の抵抗値  $R$  は、

$$R = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$

となり、黄金比と一致することが知られています。

\* \* \*

## ■参考文献、参考 HP

- [1] 「落し戸暗号の謎解き」、マーチン・ガードナー、丸善

## 8. 課題Ⅱ

- [1] 今回のゲームのルールを変えて、先攻の必勝法について考察してみましょう。(数学的背景が見出せなくても構いません)
- [2] 書籍や web から、ゲームの必勝法と数学の関連する事例を調べて紹介してください。
- [3] 3回の講義についての感想を記述してください。

※[1]と[2]から1つのテーマを選択してください。[3]は必須とします。