

Nara Women's University

科学の言語としての数学

メタデータ	言語: ja 出版者: 公開日: 2016-12-27 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 吉田, 信也, 小林, 毅, 川口, 慎二, 片桐, 民陽 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10935/4411

科学の言語としての数学

自然の中の数学

吉田信也

I シャボン膜は知っている

1. 最小になるのはどこだ？

実は、自然は最大・最小(極大・極小)をよく知っている。それを確認する前に、まずは次の課題を考える。

[課題 1]

東京、名古屋、新潟の3都市を結ぶ電力ケーブルを、下記の条件で敷設して電力を供給するとき、どのようにケーブルを敷設すれば、敷設コストは最小となるか？

- ・2地点を結ぶケーブルは直線で結べるとする
- ・ケーブル敷設コストは、1km 当たり 1000 万円
- ・ケーブルの途中どこでも分岐点を設置でき、分岐点の敷設コストは 0 円



例えば、上図の三角形において、短い方の2地点をケーブルで結んでも、電力は供給できるので、

$$254 + 260 = 514 \text{ km} \cdots (*)$$

と敷設するのが、コスト最小のように思える。

さて、(*)が本当に最小となる場合であるかを考える。

このような、3地点のいずれかだけを結ぶ敷設方法であれば、(*)が最小となる。しかし、分岐点を作ってもよいという条件があるので、(*)より短い敷設方法があるとすれば、どこかに分岐点を作って敷設する方法が考えられる。

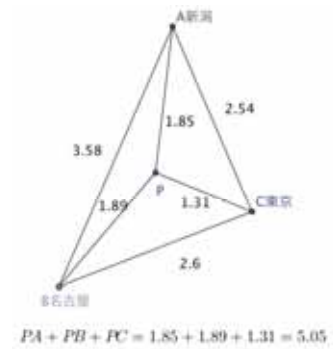
[解決法 1] 直観的方法

自分で図をいろいろ描いて、コストが最小となる点を探して、ほぼこの辺りという点を見つけた人もいるだろう。直観も大切な数学の力だ。

[解決法 2] 実験的方法

直観的に得た結果を確認する、あるいは、最初から実験的に求める点を探すためには、コンピュータが有効だ。数学用フリーウェアソフト“GeoGebra”で作成したファイル“電力送電網の最短距離.ggb”を開いて、実験してみよう。

分岐点をどこかに置く方が最小になるとすれば、その位置はどこだろう？ そして、その点はどんな性質をもっているだろう？

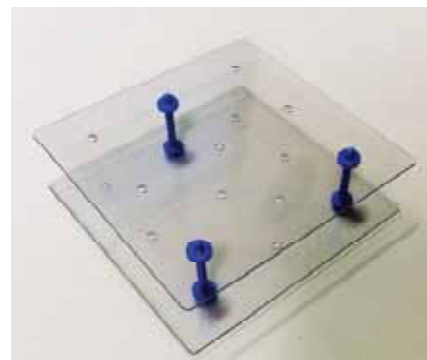


[解決法 3] 自然が知っている方法

課題 1 の 3 地点の状況を、右図のようなプラスチックの板と棒で作る。それを、シャボン玉の液につけてそーっと引き上げると、シャボン膜はどのように張るだろう？

実験の前に、右図に貴方の予想するシャボン膜を描いてみよう。

さて、実験結果はどうなったか？



シャボン膜は非常に薄い(軽量)ので、膜にかかる力は表面張力だけである。そして、その表面張力が最小になるように、すなわち膜の表面積が最小となるように膜が張られる。したがって、先のプラスチックの板を上から見たときの膜の線の長さの和は最小になっている。自然(シャボン膜)は、最小となる方法を知っている！

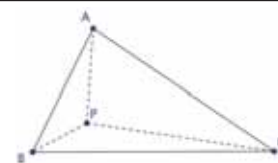
シャボン膜が知っている、この最小となる点は何んな点であるのかを、これから探っていく。

2. 数学の世界に持ち込むと？

実は、課題 1 は次のような数学の問題として古くから考えられている。

[課題 2] フェルマー・シュタイナー問題

三角形 ABC とその内部の点 P を考えるとき、 $PA+PB+PC$ を最小にする点 P はどこにあるか？



この至ってシンプルな問題は、1629 年にフェルマーによって提示された。フェルマーは、フェルマーの最終定理

n を 3 以上の自然数とすると、

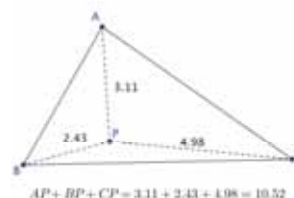
$x^n+y^n=z^n$ を満たす自然数の組 (x, y, z) は存在しない

を予想したことでも有名である。この問題は、フェルマーが読んでいた数論の本の余白に、「この問題の驚くべき証明を得たが、この余白は証明を書くには狭すぎる」と書き残したことから、フェルマー予想と呼ばれていた。フェルマー予想は、問題自体は小学生にも理解できるくらい非常に簡潔であるにもかかわらず、幾多の大数学者の挑戦をはねのけ続けたが、360 年後の 1995 年に、イギリスの数学者アンドリュー・ワイルズが、教え子のリチャード・テイラーの助けを得て完全に証明した。

閑話休題。課題 2 はイタリアの数学者トリチェリによって、1640 年よりも前のどこかの時点で証明された。しかし、幾何学を研究していたドイツの数学者ヤコブ・シュタイナー(1796~1863)にちなんで、「フェルマー・シュタイナー問題」と呼ばれる。

[実験 1] フェルマー・シュタイナー問題

三角形 ABC とその内部の点 P を考えるとき、 $PA+PB+PC$ を最小にする点 P はどこにあるかを、GeoGebra を利用して発見せよ。



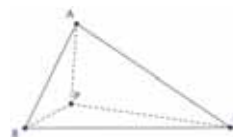
[結果]

課題 2 については、イタリアの数学者カヴァリエリ(1598~1647)が、点 P について次のような興味深い性質を 1647 年に発表している。

[定理 1] カヴァリエリ

内角がすべて 120° より小さい三角形 ABC と、その内部の点 P を考える。

$PA+PB+PC$ が最小 $\Rightarrow \angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$



この結果は、現代の施設配置問題(ケーブルの敷設問題、消防署の配置問題等)に応用できる結果である。証明は、微積分を利用してもできるが、ドイツの数学史家ホフマンが 1929 年に発表した鮮やかな幾何学的証明を見よう。

(証明) ホフマン

$\triangle APB$ を点 B を中心に 60° 回転させた三角形を $\triangle A'P'B$ とすると、

$$PB = P'B, \angle PBP' = 60^\circ$$

より、 $\triangle BPP'$ は正三角形となる。

よって、

$$PB = P'B = P'P \cdots \textcircled{1}$$

また、回転移動より、

$$PA = P'A' \cdots \textcircled{2}$$

ゆえに、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、

$$PA + PB + PC = A'P' + P'P + PC \cdots \textcircled{3}$$

ここで、折れ線 $A'P'PC$ の長さが最小となるのは、折れ線が直線 $A'C$ になるときである。

ゆえに $\textcircled{3}$ より、 $PA + PB + PC$ が最小となるのは、 A' 、 P' 、 P 、 C が同一直線上にあるときであるから、

$$\angle BPC + \angle BPP' = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BPC + 60^\circ = 180^\circ$$

よって、

$$\angle BPC = 120^\circ$$

同様にして、点 A 、 C を中心とした 60° の回転を考えることにより、

$$\angle APB = \angle CPA = 120^\circ$$

よって、

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$$

(Q.E.D.)

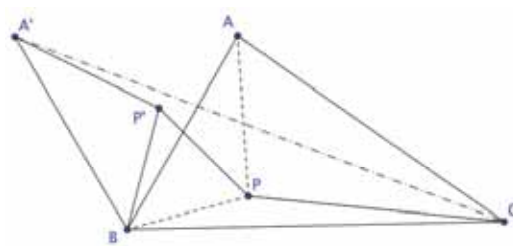
※ Q.E.D. はラテン語 “quod erat demonstrandum” の略であり、「証明終わり」を意味する。

フェルマー・シュタイナー問題の求める点 P のことを、「シュタイナー点」と呼ぶことが多い。

この鮮やかな証明は、回転移動や対称移動によって等しい長さを移すという、数学でよく利用される考え方に基づいている。そしてこの証明法は、シュタイナー点 P の位置をどのように作図すればよいかを示している点においても素晴らしい。

[問 1] ホフマンの証明における $\triangle BAA'$ がどのような三角形であるかを考えることにより、シュタイナー点の作図方法を述べよ。

[問 2] フェルマー・シュタイナー問題において、 $\triangle ABC$ の内角の 1 つが 120° より大きいとき、シュタイナー点はどのようになるかを考察せよ。

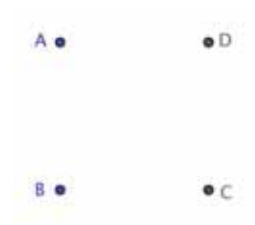


3. 拡張を考えると？

課題 1 は、3 地点を結ぶときのネットワークの最短距離を求めるものであった。それでは、次のような問題が現実にあったとすると、どう解決すればよいだろう？

[課題 3]

ある会社の 4 つの施設 A, B, C, D が、四角形 ABCD が正方形をなすように位置している。4 つの施設をネットワークで結びたいとき、ネットワークの距離を最小にするには、どのような結び方をすればよいか？



[解決法 1] 直観的方法

自分で試行錯誤しながら図をいろいろ描いて、ネットワークの最短距離を求めよ。

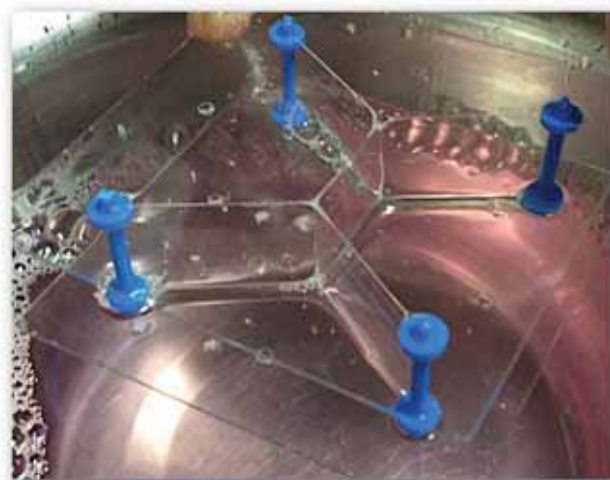
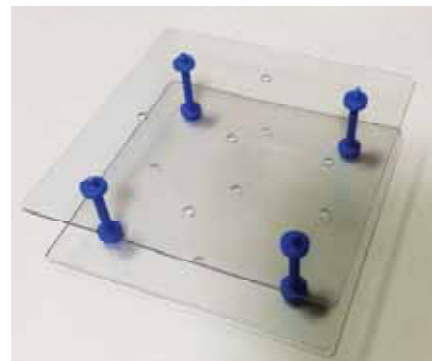


[解決法 2] 自然が知っている方法

課題 2 の 4 地点の状況を、右図のようなプラスチックの板と棒で作る。それを、シャボン玉の液につけてそーっと引き上げると、シャボン膜はどのように張るだろう？

実験の前に、右図に貴方の予想するシャボン膜を描いてみよう。

さて、実験結果はどうなったか？



正方形の1辺の長さを1として考える。

まず、3点を右図のように結ぶと、その長さは、

$$L=AB+BC+CD=3$$

である。

次に、分岐点を1つ作ってPとし、線分AC, BDの交点をOとすると、

$$AP+PC+BP+DP \geq AC+BD$$

となり、等号が成立するのはP=Oのときである。

よって、分岐点が1個のときの最短の長さは、

$$L=AC+BD=2\sqrt{2} \doteq 2.82 < 3$$

となる。

さて、もっと短くできないか？

分岐点が2つの場合を考えよう。このとき、フェルマー・シュタイナー問題を考えたときの方法が利用できる。

[解法1]

右図のように、2つの分岐点をP, Qとする。△APDを点Aを中心に60°回転した三角形を△AP'D'とし、△CQBを点Cを中心に60°回転した三角形を△CQ'B'とする。このとき、△APP'と△CQQ'は正三角形であることに注意すると、

$$\begin{aligned} & AP+DP+PQ+BQ+CQ \\ &= AP'+D'P'+PQ+B'Q'+CQ' \\ &= D'P'+P'P+PQ+Q'Q'+Q'B' \\ &= \text{折れ線 } D'P'P'Q'Q'B' \text{ の長さ} \end{aligned}$$

ここで、折れ線D'P'P'Q'Q'B'の長さが最小になるのは、この折れ線が直線D'B'と一致するときである。それは、

$$\angle APP' = \angle CQQ' = 60^\circ$$

であることと、対称性から、

点P, Qの周りの角度がすべて120°であるときとなる。

よって、このときのネットワークの最短の長さは、

$$\begin{aligned} L=D'B' &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin 60^\circ} \times 4 + \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\tan 60^\circ} \times 2\right) \\ &= 1 + \sqrt{3} \doteq 2.73 < 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

[解法2]

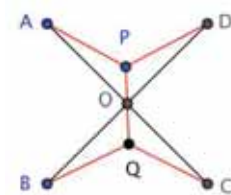
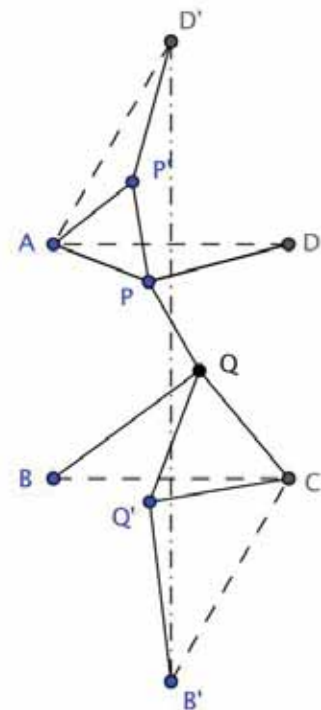
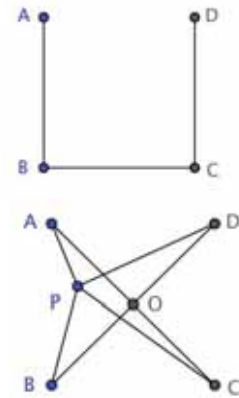
右図において、△AODのシュタイナー点をP、△BOCのシュタイナー点をQとすると、

$$OA+OD+OB+OC > AP+DP+PO+BQ+CQ+QO$$

である。

もし、

$$AP+DP+PO+BQ+CQ+QO$$



が最小だとすると、

点 P は $\triangle AQD$ のシュタイナー点、かつ点 Q は $\triangle BPC$ のシュタイナー点である。

したがって、点 P, Q の周りの角度がすべて 120° となる。

よって、このときのネットワークの最短の長さは、

$$\begin{aligned} L = D'B' &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin 60^\circ} \times 4 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{\tan 60^\circ} \times 2 \\ &= 1 + \sqrt{3} \doteq 2.73 < 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

以上の正方形の場合に出てきた、最短ネットワークを構成する分岐点を、三角形の場合と同じく、シュタイナー点と呼ぶ。

では、シュタイナー点が 3 個、4 個、 \dots と存在すれば、さらにネットワークを短くできるのだろうか？ 実は、次の定理が成立する。

[定理 2]

n 個の点の最短ネットワークにおいて、シュタイナー点は最大 n-2 個である。

(証明)

シュタイナー点の個数を k 個とすると、最短ネットワークを構成する線分の数は、

$$n + k - 1 \text{ 本} \cdots \textcircled{1}$$

である。

また、1 個のシュタイナー点から出る線分は 3 本であり、n 個の点からは少なくとも n 本の線分が出ているが、線分は 2 つの頂点を結んでいるので重複がある。よって、この場合の線分の個数は、

$$\text{少なくとも } \frac{3k+n}{2} \text{ 本} \cdots \textcircled{2}$$

ゆえに、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より、

$$n + k - 1 \geq \frac{3k+n}{2} \Leftrightarrow k \leq n - 2$$

(Q.E.D.)

正方形の場合は $n=4$ であるから、シュタイナー点が 2 個以下の場合を考えればよい。

ゆえに、4 つの点が正方形をなす場合の最短ネットワークの長さは、

$$L = 1 + \sqrt{3}$$

である。

以上のような問題は、

シュタイナー最小木問題

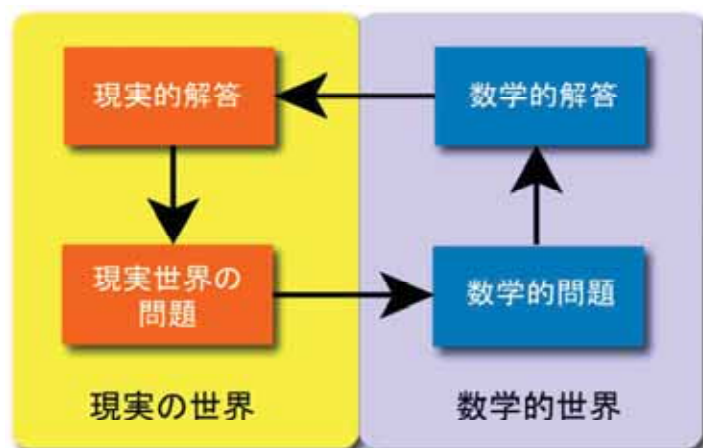
と呼ばれているが、施設設置問題の他にも、VLSI 回路を設計するときの最も基本的な技術等に活用されている。

II シャボン玉は知っている

1. シャボン玉はなぜ丸い？

I で学習したように、シャボン膜はネットワークの最短距離を知っていることを実験で観察し、それが実際に最短距離であることを数学で解明した。そして、この結果は、施設やネットワークの配置問題、VLSI 回路の設計等に生かされる形で、現実に応用されている。

一般的には、下図のようなサイクルの形で、自然界や社会の現象や事柄を数学という言葉で表現し、解明していることになる。



では、前のシャボン膜に引き続いて、自然から学んでいこう。

[課題 4]

シャボン玉は、なぜ丸いのか？ その理由を考えよ。

小さい頃(あるいはいまでも)シャボン玉を作って遊んだことだろう。そのとき、シャボン玉はなぜ丸いのか、不思議に思ったことはないだろうか？

世の中には、当たり前だと思っていることでも、よく考えてみると不思議に思えることはたくさんある。シャボン玉がなぜ丸いのかも、その1つだろう。他にも、

- ・なぜ、平面上の2点を最短距離で結ぶ曲線は直線なのか？
- ・なぜ、光は最短時間で進むのか？

など、いろいろと考えられる。このような、直観的には明らかに思えても、改めて「なぜ？」と聞かれると答えに窮することはよくある。そのときが、数学の出番なのだ。

では、課題4について考えよう。シャボン玉の膜は非常に薄いために、重さを無視することになると、シャボン玉に働く力は表面張力のみとなる。そのために、シャボン玉は一定の体積(吹きこまれた空気の量)を保つ条件のもとで、表面張力が最小になるような形をとろうとする。科学的(理的)にいうと、自然はポテンシャルエネルギーを最小にしようとするのである。ここで、表面張力は表面積に比例すると考えられるので、シャボン玉は表面積が最小になろうとした結果として、球形になると考えられる。



つまり、シャボン玉が丸いのは、

体積が同じ立体の中で、表面積が最小となるのは球である

ということを示している。

さて、これは本当だろうか？ まずは具体的に調べてみる。

[課題 5]

次のような体積 $V=1$ の立体を考えると、それぞれの立体の表面積 A の近似値を求めよ。

- (1) 球(半径 r)
- (2) 正四面体(1 辺 r)
- (3) 立方体(1 辺 r)
- (4) 円柱(底面の半径 r , 高さ $2r$)

(解答)

$$(1) \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3 = 1 \text{ より, } r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$$

ゆえに,

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4\pi}\right)^2} = 4\sqrt[3]{\frac{9\pi}{16}} \doteq 4.84 \cdots \textcircled{1}$$

(2) 正四面体の高さを h とすると、三平方の定理より、

$$h^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r \cdot \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}r^2$$

$$\text{よって, } h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r$$

$$\text{ゆえに, } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}r \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{12}r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r = \frac{\sqrt{2}}{12}r^3 = 1$$

$$\text{よって, } r^3 = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \text{ だから, } r = \sqrt[3]{6\sqrt{2}}$$

ゆえに,

$$A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}r \cdot 4 = \sqrt{3}r^2 = \sqrt{3} \sqrt[3]{36 \cdot 2} = 2\sqrt{3} \sqrt[3]{9} \doteq 7.21 \cdots \textcircled{2}$$

(3) $V = r^3 = 1$ より, $r = 1$

$$\text{ゆえに, } A = 6r^2 = 6 \cdots \textcircled{3}$$

$$(4) \quad V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = 1 \text{ より, } r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

ゆえに,

$$A = \pi r^2 \times 2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2 = 6\pi \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}} = 6\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} \doteq 5.54 \cdots \textcircled{4}$$

課題5の①, ②, ③, ④から, 体積が一定のときの表面積の大きさは,

正四面体の $A >$ 立方体(正六面体)の $A >$ 円柱の $A >$ 球の A

となるので, 球の表面積がいちばん小さくなるようだ。

しかし, これは具体的な幾つかの立体について, 具体的に表面積を計算しただけなので, 数学の証明にはなっていない。そこで, 引き続き数学的に考えていく。

2. 大昔から知っていた?

実は, 体積が一定のときの表面積が最小となる問題に似ている次のような問題は, キリストが生まれるよりも何世紀も前から, 古代ギリシャやエジプトの数学者によって考えられていた。

[課題5] 等周問題

長さが一定の閉曲線の中で, その閉曲線で囲まれる面積を最大にするのは何か?

課題5を満たす曲線が円であることは, 古代の人たちは直観的に認めていたし, 現代の私たちがそうだろう。しかし, これは非常に深い問題であり, 円であることを数学的に証明するには, たくさんの天才たちの貢献を経て, 厳密な証明が得られたのはなん 19 世紀(!)になってからである。ついでに, 平面上の 2 点を結ぶ曲線で長さが最小なのは直線であることの厳密な証明は, これもなんと 18 世紀(!)である。こんな直観的には明らかなことを厳密に証明しようと努力する数学(者)は素晴らしい! と思うか, 呆れた...と思うかは人によって違うだろうけれど, もう少し数学者の努力を見ていこう。

課題5の等周問題の起源は, ローマの詩人ヴェルギリウス(アウグストゥスと同時代の人)の叙事詩『アエネーイス』に書かれている, 次のようなカルタゴ女王ディドーの物語まで遡ることができる。

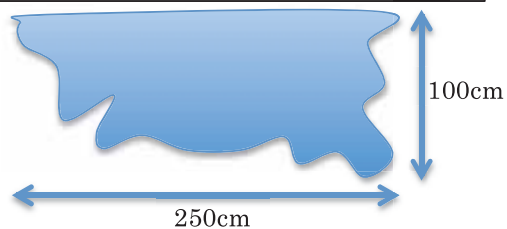
フェニキアの王女であったディドーは, 彼女の夫を殺害した残忍な兄ピグマリオンから逃れるために海を渡り, 北アフリカの現在チュニス湾と呼ばれるところに上陸した。ディドーは家臣とともに新しい国を築くために, その地の支配者ヌミディアのジャーバス王から土地を買おうとした。彼らが結んだ売買契約は, 牛 1 頭分の皮で囲めるだけの土地を買うというものであった。ヌミディアの人たちは冗談だと思いきや一笑に付したが, 最後に笑ったのはディドーであった。

[課題6] ディドーの問題

ディドーは, 牛 1 頭分の皮で囲めるできるだけ広い土地を得ようとして, どのような方策を考えたか? また, その結果として, どれ位の大きさの土地を得ることが出来たか?

ディドーは, 右図のような牛半頭分の皮 2 枚から, 幅 2.5mm の何本もの紐を切り取り, それらをつなぎ合わせて 1 本のロープを作った。

[問3] そのロープの長さを求めよ。



ディドーは、真っ直ぐな海岸線を一方の境界として、出来上がった 2km のロープで半円形に土地を囲い込んだ。彼女は、面積が最大になるのは土地の形が半円形するときであることを知っていたに違いない。このようにして、古代都市カルタゴは出来上がった（右図は現在の博物館にある想像図）。



[問 4] ディドーが手に入れた半円形の土地の半径とその面積を求めよ

3. 等周問題は解決？

さて、ディドーの問題を数学的に書きなおすと、次のようになる。

[定理 3] ディドーの問題

定直線 L 上の 2 点を、一定の長さの曲線で結ぶとき、領域の面積が最大になる曲線 C は半円である。

(証明) スイス人数学者シュタイナー(1796~1863)

まず、 C は凸図形でなければならない。

なぜなら、 C が凸図形でないとすると、右図のような図形となる。

(i) 穴が開いているとき

穴を取り除くことにより、周の長さが短くなり面積は大きくなる。

(ii) 凹んでいる部分があるとき

接線に関して対称に折り返すことにより、周の長さは同じで面積は大きくなる。

いずれにしても条件を満たさないので、 C は凸図形でなければならない。

さて、右上図において C は半円ではないとすると、 C 上の点で、

$$\angle APB \neq 90^\circ \cdots \textcircled{1}$$

なる点 P が存在する(注 1)。領域を弦 AP 、 BP で 3 つの部分に分割して、それぞれ R_1 、 R_2 、 R_3 とする。

ここで、 AP 、 BP を硬い棒だと思い、

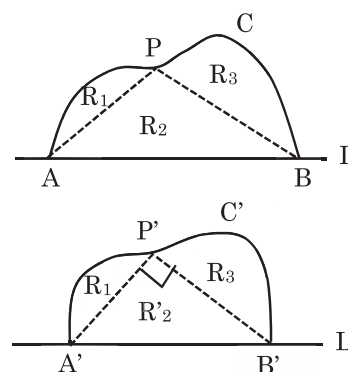
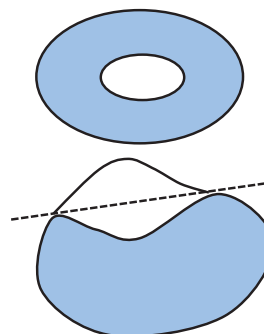
$$\angle A'P'B' = 90^\circ \cdots \textcircled{2}$$

となるように、点 A を A' 、 B を B' に移動させる。このとき、点 P は P' に移動し、

$$AP = A'P', \quad BP = B'P' \cdots \textcircled{3}$$

となる。この移動の結果、曲線 C は C' に移動したとする。

③より、 R_1 、 R_3 は変化することなく弦 $A'P'$ 、 $B'P'$ の上に移動し、 R_2 は R_2' に移動している。



ここで、①、②、③より、

$$\triangle APB = \frac{1}{2} AP \cdot BP \sin \angle APB < \frac{1}{2} A'P' \cdot B'P' \sin 90^\circ = \triangle A'P'B'$$

であるから、任意の曲線 C を

$$C \text{ の周の長さ} = C' \text{ の周の長さ, } C \text{ と } L \text{ で囲む面積} < C' \text{ と } L \text{ で囲む面積} \cdots \textcircled{4}$$

を満たす曲線 C' に変形することができる(注 2)。

④のような、周の長さが変わらずに面積が増加するような変形を受けない曲線は、半円に限る(∵ C が半円なら①を満たすような点 P は存在しないから)。

よって、領域の面積が最大になるのは、C が半円のときである。

(Q.E.D.)

(注 1) 曲線上の任意の点 P について $\angle APB = 90^\circ$ となるのは円だけであることを示す必要があるが、その証明は省略する。

(注 2) 移動することで領域 R_1, R_3 が重なることはないのであるが、その説明は省略する。

[定理 4]

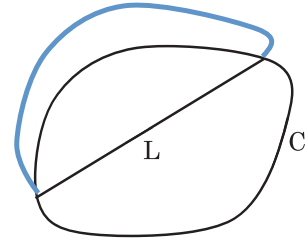
曲線 C を等周問題の解となる図形とすると、C 上の 2 点を結ぶ弦で周を 2 等分するものは、面積も 2 等分する。

(証明)

このような弦 L が、面積を 2 等分しないとすると、面積の大きい方を L に関して対称に折り返してできる図形は、周の長さは同じであるが、面積は大きくなる。

これは、C が等周問題の解であることに矛盾する。

よって、L は面積も 2 等分する。



(Q.E.D.)

(注) C 上の 2 点を結ぶ弦で周を 2 等分するものが存在することは、実は証明が必要であるが、省略する。

以上で、等周問題のシュタイナーの証明の準備が出来上がった。

[定理 5] 等周問題

長さが一定の閉曲線の中で、その閉曲線で囲まれる面積を最大にするのは円である。

(証明) シュタイナー

等周問題の解となる図形 C が与えられたとして、C の周を 2 等分する弦 L を描き、C を 2 つの図形 C_1, C_2 に分割する。 C_1, C_2 は弦 L を共有しているので周の長さは同じであり、定理 4 より面積も同じである。

ここで、 C_1, C_2 の(同じ)面積を最大にすれば、C の面積は最大になる。定理 3 より、 C_1, C_2 の(同じ)面積が最大になるのは、 C_1, C_2 が半円のときであるから、C は円である。

(Q.E.D.)

以上で、シュタイナーは見事なアイデアで等周問題を解決したように思える。しかし、実はこの証明には欠陥がある。

[問 5] シュタイナーの証明の、数学的欠陥を述べよ。

シュタイナーの証明は、

等周問題の解となる曲線の存在を、証明なしに仮定している

ことが数学的にはダメであると、同時代のドイツ人数学者ディリクレ(1805~1859)に指摘されていた。これに対してシュタイナーは、解が存在するのは明らかであると反論した。大多数の人は、シュタイナーと同じように考えるだろう。しかし、幾何学の問題では、解が存在するのは明らかに見えても、実は解が存在しない問題はいくらでもある。

[例]

周の長さが 1 より小さい凸図形の中で、面積が最大のものを見つけよ。

[解]

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、周囲の長さが $1 - \varepsilon$ の凸図形 C を考える。 C を周の長さが $1 - \frac{1}{2}\varepsilon$ である相似な図形 C_1 に相似拡大すると、 C_1 の周の長さは 1 より小さく、面積は C よりも大きい。この操作を繰り返すと、周の長さが $1 - \frac{1}{2^n}\varepsilon$ ($n=1, 2, \dots$) と 1 より小さく、面積が増加する凸図形の無限列が得られる。

すなわち、周の長さが 1 より小さい凸図形で面積が最大となるものは存在しない。

このような数学の厳密性に美しさを観るか、めんどくさい学問だと感じるか、これも人によって様々だろう。

閑話休題。古代から等周問題とその解がよく知られていたことは、例えば下図のような中世における都市の城壁の形を見ても分かる。



現在のケルン市街



中世都市ネルトリンゲン

4. 双対性

解決した等周問題に関して、次の定理が成り立つ。

[定理 6] 双対性

平面上の閉曲線の周の長さを L ，閉曲線が囲む領域の面積を A とし，2つの命題を

P : L が一定のとき， A が最大となる閉曲線は円である。

Q : A が一定のとき， L が最小となる閉曲線は円である。

とすると， P と Q は同値($P \Leftrightarrow Q$)である。

(証明)

(i) $P \Rightarrow Q$ の証明

Q でないと仮定すると，面積 A の円 C に対して，ある曲線 D が存在して，

$$A_D = A_C = A, L_C > L_D$$

を満たす。

ここで，円 C を周の長さが D と同じになるまで縮小し，その円を C' とすると，

$$L_{C'} = L_D, A_{C'} < A_C = A_D$$

となるが，これは仮定の命題 P の主張である

$$A_{C'} > A_D$$

に矛盾する。

よって， $P \Rightarrow Q$ は成立する。

(ii) $Q \Rightarrow P$ の証明

P でないと仮定すると，周の長さ L の円 C に対して，ある曲線 D が存在して，

$$L_D = L_C = L, A_C < A_D$$

を満たす。

ここで，円 C を面積が D と同じになるまで拡大し，その円を C' とすると，

$$A_{C'} = A_D, L_{C'} > L_C = L_D$$

となるが，これは仮定の命題 Q の主張である

$$L_{C'} < L_D$$

に矛盾する。

よって， $Q \Rightarrow P$ は成立する。

以上より， $P \Leftrightarrow Q$ である。

(Q.E.D.)

命題 P は等周問題の解であり，真であることを証明したので，命題 Q も真である。

そこで，命題 Q の次元を 1 つ上げると，次の定理が成り立つ。

[定理 7] シャボン玉

同じ体積を囲む閉曲面の中で，表面積が最小となるのは球である。

5. 変分法

定理 7 が成り立つことを数学的に厳密に証明するには、**変分法**という数学が必要となる。変分法は、イギリスの天才数学者ニュートン(1642～1727)とドイツのこれまた天才数学者ライプニッツ(1646～1716)が発見した**微分法**の兄貴分、とでも言うべき数学である。微分法と変分法の違いを、具体例で見よう。

[課題 7] 微分法

4 辺の長さの和が 4 である長方形のうち、面積が最大のものとは何か？

長方形の横の長さを x 、面積を S とすると、

$$S = x(2-x) = -x^2 + 2x$$

よって、

$$\frac{dS}{dx} = -2x + 2 = 2(1-x)$$

$$\frac{dS}{dx} = 0 \text{ とすると、 } x = 1$$

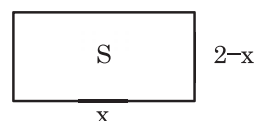
増減表より、 S は $x = 1$ で最大値をとる。

よって、面積が最大となるのは、正方形のときである。

このように、一般的にいうと、

関数 $f(x)$ が極値をとる x の値を求める方法が微分法

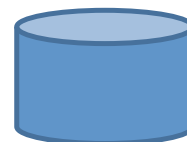
である。



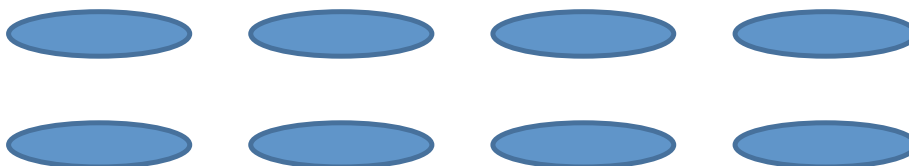
x	0	...	1	...	2
$\frac{dS}{dx}$	/	+	0	-	/
S	/	↑	極大 1	↓	/

[課題 8] 変分法

右図のような、底面の半径が 1、高さが 1 の円柱形の容器がある。この容器の表面に塗料を塗りたい。塗料の量が最も少なくなるように容器の側面の形を変えるとき、その形はどうなるか？



[貴方の予想]



塗料の量を最小にするには、容器の側面の表面積を最小にすればよい。

課題 7 においては、 S が最大となる x の値は、 x を少し変化させても S はほとんど変化

しない、つまり変化率が 0 となる ($\frac{dS}{dx} = 0$) ことから求められる。これと同様の考え方で、

課題 8 を満たす側面の曲線 $f(x)$ があるとして、 $f(x)$ をどのように変形しても表面積は増えるが、表面積の変化率は $f(x)$ で 0 になっているはずである。つまり、表面積が最小になる $f(x)$ では、曲線を少し変化させても表面積はほとんど変化しないはずである。

このように,

表面積が極値をとる曲線(関数) $f(x)$ を決定する方法が変分法

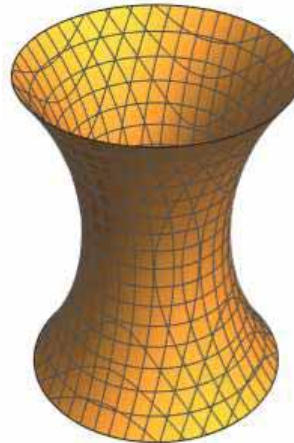
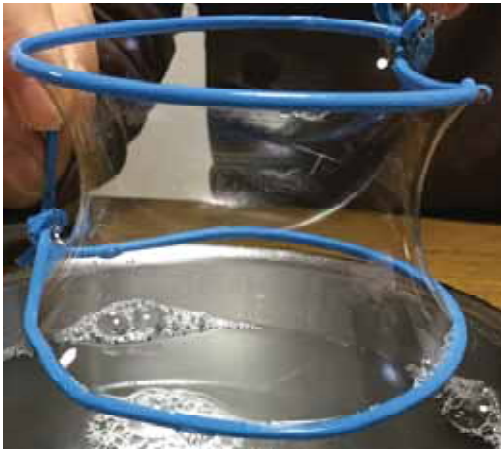
である。

微分法と変分法の違いは、簡単に言うと、

変分法は、変形の仕方に無限のバリエーションがある

ことである。課題 8 においては、側面を表す曲線 $f(x)$ としては直線、放物線などありとあらゆる曲線が考えられるのである。その中で、表面積を最小にする曲線(関数)を求める方法が変分法なのである。

ここで、実はシャボン膜(自然)は、またまた答えを知っているのである。



この曲面は、懸垂曲面と呼ばれる曲面であり、カタナリーという曲線を回転させて得られる。この曲面が表面積最小となることを、次の問いに従って数学的に示そう。

[問 6]

- (1) 課題 8 の立体の側面を表す曲線を $y=f(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$), $f(-1)=f(1)=2$ とし、この曲線の微小部分の長さを ds とする。曲線 $y=f(x)$ を x 軸の周りに 1 回転したとき、この微小部分が掃く曲面の微小部分の面積を dA とすると、

$$dA = 2\pi y \sqrt{1+(y')^2} dx$$

であることを説明せよ。

- (2) この円柱状の立体の側面積は、

$$S = 2\pi \int_{-1}^1 y \sqrt{1+(y')^2} dx$$

であることを説明せよ。

- (3) 変分法を用いると、側面積 S を最小にする関数 y は、微分方程式

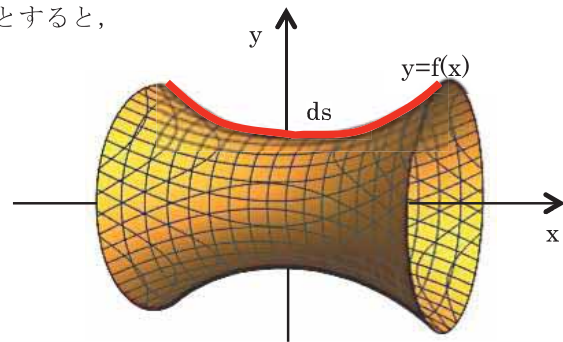
$$yy'' = 1+(y')^2 \cdots (*)$$

を満たすことが分かる。このとき、関数

$$y=f(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} \cdots (\star) \quad (a \text{ は定数})$$

は、(*)を満たすことを示せ。

※シャボン膜の右横の図は、(\star)において $a=0.589$ の $y=f(x)$ を回転したものである。



6. 変分問題

変分法の一般的な理論の発展は、スイスの天才数学者オイラー(1707~1783)に始まる。オイラーは、数学の様々な分野(解析学, 数論, 幾何学, 数理物理学等)に偉大な業績を残した数学者であり、晩年は失明したがその旺盛な研究意欲は衰えることがなかった。オイラーは、「息をするように、鷲が空を舞うように計算する」と言われるくらい計算が得意であり、理論的なきちんとした証明は後世に行われた事柄でも、自由に間違いなく正しい計算を行って数学的な結果を残した。彼の残した膨大な業績は、5万ページを超える全集にまとめられて1911年から刊行され続けているが、100年以上たった今日でも未だに完結していない。

オイラーの発見した次の等式(オイラーの等式)は、数学のいちばん美しい等式とも言われる。

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

また、次のような等式(バーゼルの問題)も証明している。

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

フランス人の数理物理学者ラグランジュ(1736~1813)は、19歳のとき(1755年)にオイラーに手紙を出した。そこに書かれていたラグランジュの方法が優れていたため、その方法の習得に熱中したオイラーは**変分法**と名づけた。

変分法の問題、あるいは変分問題は、一般的に最も簡単に述べると次のようになる。

[定義 1] 変分法の問題・変分問題

変分問題とは、 x_1 , x_2 と関数 F が与えられたとき、積分(汎関数)

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F\{x, y(x), y'(x)\} dx$$

を最小にする関数 $y(x)$ を求めることである。

つまり、

F は x , y , y' のどのような関数かはわかっているが

y は x のどのような関数かわかっていないとき

J を最小にする関数 y を求めよ

というのである。

問 6 は、回転体の表面積を表す積分

$$S = 2\pi \int_{-1}^1 y \sqrt{1+(y')^2} dx$$

を最小にする関数 y を求める問題であり、関数 F の形は

$$F\{x, y, y'\} = y \sqrt{1+(y')^2}$$

で与えられる。そして、問 6 の解は(☆)となることに変分法でわかるのである。

では、どのようにして積分の値を最小にする関数 $y(x)$ を求めればよいのだろう。実は、次のオイラー=ラグランジュ方程式を利用する。

[定理 8] オイラー＝ラグランジュ方程式

x_1, x_2 と関数 F が与えられたとき、積分(汎関数)

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F\{x, y(x), y'(x)\} dx$$

を最小にする関数 $y(x)$ が存在するならば、 $y(x)$ は次の等式を満たす。

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \cdots \text{(EL)}$$

証明は省略する。

具体的に、オイラー＝ラグランジュ方程式(EL)を利用して、古典的ではあるが興味深い問題を眺めてみよう。

[課題 9] 変分問題

平面上の任意の 2 点を結ぶ曲線のうち、長さが最小のものは直線であることを示せ。

これは、小学校以来、誰もが当たり前だと思って利用してきた事柄であるが、ここで初めて数学的に証明できる！

2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を結ぶ曲線を $y=y(x)$ とすると、微小部分の長さ ds は、

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

よって、2 点 A, B を結ぶ曲線の長さ L は、

$$L = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

つまり、(EL)における F の形は、

$$F = \sqrt{1 + (y')^2} = \{1 + (y')^2\}^{\frac{1}{2}}$$

である。

よって、

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2} \{1 + (y')^2\}^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y' = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

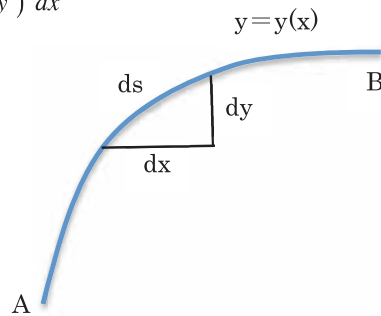
これらを(EL)に代入して、

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right\} = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{定数}$$

よって、

$$y(x) = \text{定数} \Leftrightarrow y(x) = px + q \quad (p, q \text{ は定数})$$

すなわち、直線であることが証明された！



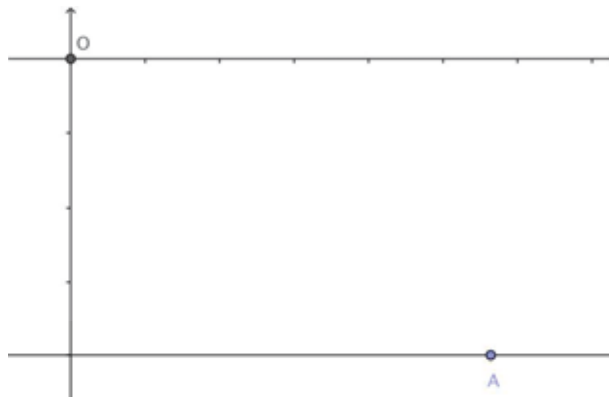
[課題 10] 変分問題

平面上の曲線 $y=y(x)$ に沿って、ガラス玉が原点 $O(0, 0)$ から点 A まで重力によって滑り落ちるとする。このとき、摩擦は考えないものとする。ガラス玉が O から A まで最短時間で降下するとき、その曲線はどんな曲線か？

[貴方の予想]

■ 曲線 $y=y(x)$ の概形

■ 曲線 $y=y(x)$ の名前



曲線 $y=y(x)$ 上の点 (x, y) におけるガラス玉の速度を v とすると、エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad (g \text{ は重力定数})$$

よって、

$$v = \sqrt{2gy} \cdots \textcircled{1}$$

また、微小曲線の長さを ds とすると、

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

よって、

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dt} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{dt} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{dt}$$

ゆえに、

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{v} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2} dx}{\sqrt{2gy}} \quad (\because \textcircled{1} \text{ より})$$

点 A の x 座標を L とすると、 O から A までの降下時間 T は、

$$T = \int_0^L \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^L \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} dx \cdots \textcircled{2}$$

つまり、変分法における関数 F は、

$$F = \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} \cdots \textcircled{3}$$

ここで、次の公式を利用する。

[定理 9] ベルトラミの公式

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{定数} \cdots \text{④}$$

※この公式は、定理 8 のオイラー＝ラグランジュ方程式(EL)の特別な場合である。定理 8 を利用してもよいが、この公式を利用するほうがあとの計算が楽になる。

③については、 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ より、④を利用して計算すると、

$$y\{1+(y')^2\} = C \quad (C \text{ は定数}) \cdots \text{⑤}$$

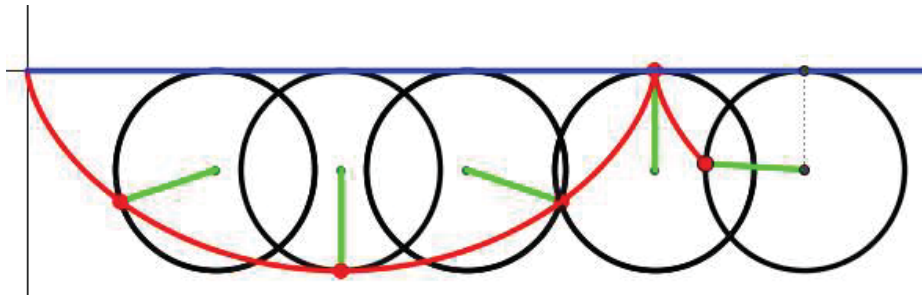
を得る。

この微分方程式⑤を解くと(巧妙な方法を利用する)、

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta)$$

を得る。

これは、サイクロイドと呼ばれる曲線であり、半径 a の円を直線にそって滑ることなく転がしたときに円周上の点が描く曲線であり、下図のようになる(ただし、 y 軸は下向きを正としている)。最速降下曲線は、サイクロイドであった。



[問 7]

大阪～東京間にサイクロイド曲線

$$x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \cdots (*)$$

のトンネルを掘り、重力のみで動く夢の超特急を走らせることを考える。ただし、地下のどの地点においても重力加速度は $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とし、摩擦は考えないものとする。大阪、東京間は水平であると考え、それぞれの座標を $(0, 0)$, $(400, 0)$ とするとき(単位は km)、次の問いに答えよ(課題 10 を考えた際の①, ②も利用せよ)。

- (1) サイクロイド(*)における a の値を求めよ。
- (2) トンネルのいちばん深い所における列車の速度を求めよ。
- (3) 大阪から東京までの所要時間を求めよ。

[問 8]

サイクロイドは、最速降下曲線という性質の他に、「等時性」と言われる性質も持っている。等時性とはどのような性質か述べよ。

[課題 11] 変分問題

右図のようなネックレスを、両手で端を持ってだらんとぶら下げると、ネックレスはどのような形の曲線を描くか？ ただし、ネックレスの質量はどこでも一様(密度は一定)であるとする。



[貴方の予想]

■ 曲線 $y=y(x)$ の概形

■ 曲線 $y=y(x)$ の名前

A ○

○ B

ネックレスの描く曲線を $y=y(x)$ とし、曲線上の点を (x, y) とする。ネックレスの一定の密度を ρ 、微小部分の長さを ds 、微小部分の質量を dm とすると、

$$dm = \rho ds$$

より、この微小部分の持つ位置エネルギーは、

$$\rho ds \cdot gy \quad (g \text{ は重力加速度})$$

ゆえに、ネックレス全体の位置エネルギーは、

$$\begin{aligned} E &= \int_{x_1}^{x_2} \rho gy ds = \int_{x_1}^{x_2} \rho gy \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \rho gy \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \rho gy \sqrt{1 + (y')^2} dx \end{aligned}$$

ここで、ネックレスの長さは一定なので、

$$L = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \text{一定}$$

という条件のもとで、 E の値を最小にする $y=y(x)$ を求めることになる。

上手い考え方(省略)で、定理 8 の(EL)に代入する F を、

$$F = \rho gy \sqrt{1 + (y')^2} + \lambda \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{\lambda L}{x_2 - x_1}$$

として計算すると、微分方程式

$$y'' = C \sqrt{1 + (y')^2}$$

を得る。

この微分方程式を解くと、

$$y(x) = k \cosh\left(\frac{x-a}{k}\right) + b$$

となり、この曲線をカテナリーという。ここで、 k 、 a 、 b は両端の位置とネックレスの長さで決まる。

ただし、

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

であり、この関数をハイパボリックコサイン(双曲線余弦関数)という。

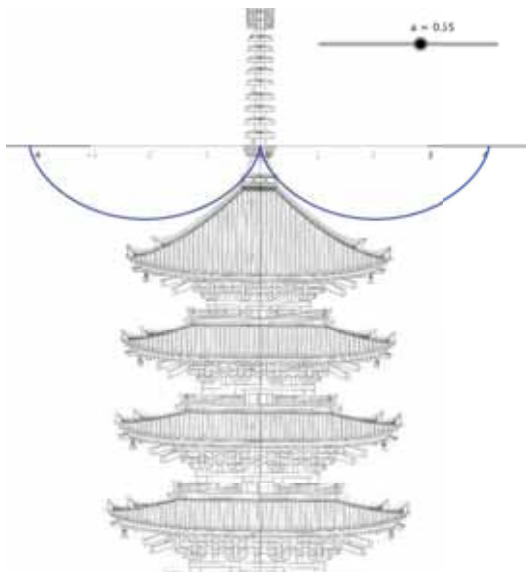
[課題 12]

サイクロイドは最速降下曲線であるから、法隆寺などの五重塔の屋根は、サイクロイドの形をしていると言われる。なぜなら、雨水を最速で屋根から落とすためには、サイクロイドの形がよいからだとのこと。

また、カテナリーも美しい曲線であり、神社の屋根の形はカテナリーの形をしているとも言われる。カテナリーは、紐で簡単に形を作ることができるからだとのこと。

これらは、はたして本当だろうか？ 下の例のように、写真を GeoGebra に取り込んで、その上に曲線を描くことで検証してみよ。

また、古代の宮大工たちがはたしてサイクロイドやカテナリーを知っていて、そのような形の屋根にしたのだろうか？ 各自で考察してみよ。



Ⅲ 自然は知っているか？

1. 黄金比は美しい？

自然の中に数学が潜んでいて、自然は数学を「知っている」、なぜか自然は数学に「支配されている」というようなことを読んだり、見たり、習ったりしてことはないだろうか？

ここでは、そのようなことについて考察していく。

[課題 13]

次の Web ページは、日本テレビ(NTV)の「世界一受けたい授業」で行われた授業の、復習コーナーである。この内容について、グループで議論して疑問や意見をまとめよ。

今回のホニャララ授業復習コーナー

■問題の答え (1/1ページ)

自然の中にはある数字が多く潜んでいます。

フィボナッチ数列の法則に従ったひまわりの種の右回りの渦の数と左回りの渦の数の比率は、だいたい1:1.618になり、この比率は「黄金比」とも呼ばれ、様々なところに登場します。
自然の中は「1:1.618」の黄金比が潜んでいます。

例えばオウム貝。
この貝は、半分に切ると中身は画像のようになっています。この画像のように向かい合った次の辺と長さを比べると、黄金比になっています。

さらにみなさんが目にする美しいと思われるものには、黄金比が潜んでいる事があります。

例えば、モナリザ。モナリザの顔は、顔の輪郭に沿って接線を引く、そしてそのたてと横の直線の長さ。
ミロのビーナスは、頭からおへそ・おへそからつま先までの長さ。

ほかに日常にも黄金比が多く見られます。名刺、タバコの箱、新書、クレジットカードなどもその一例です。

閉じる

http://www.ntv.co.jp/sekaju/student/20050528/02_0301.html

[貴方・グループの疑問・意見]

テレビで2005年5月28日に放映された「世界一受けたい授業」の中には、次のような間違いがある。

[1] オウム貝

出演した著名な数学者の秋山仁が持っているのは「オウムガイ」であり、これは貝ではなく、頭足類(イカやタコの仲間)である。流石に画面のテロップは正しく表記されているが、Web上では間違っている。この間違いは非常に多い。

[2] オウムガイに黄金比が潜んでいる

オウムガイを2つに割ると、綺麗な螺旋を見ることができる。この螺旋は、**対数螺旋**と言われるものであり、極方程式で、

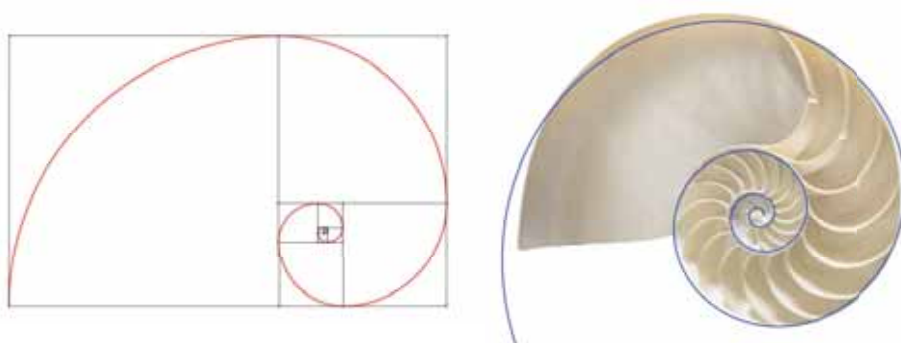
$$r = ae^{\theta \cot b} \dots (*)$$

と表される。

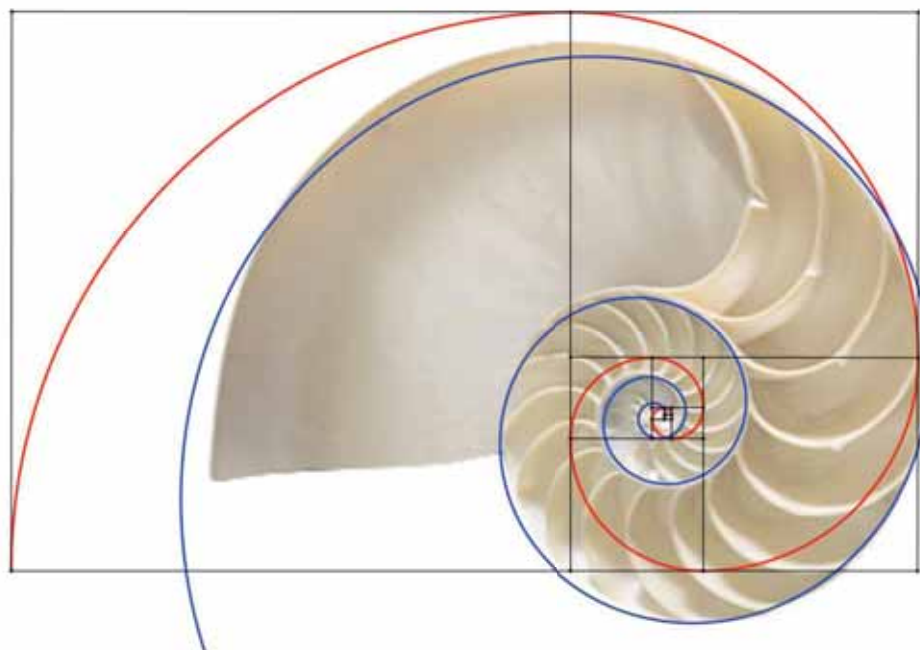
このオウムガイの螺旋に**黄金比**が現れるという意味は、

$$\text{縦} : \text{横} = 1 : 1.618$$

となる長方形(**黄金矩形**)によってできる螺旋(これも対数螺旋である)が、オウムガイの螺旋になっているということである。本当かどうか調べてみると・・・



確かに似ているが、重ねて見ると・・・



違うている！

実際に、対数螺旋(*)における b の値は、

黄金矩形の螺旋： 72.8° ，オウムガイの螺旋： $79^\circ \sim 80^\circ$

となって、黄金矩形による螺旋ではない、すなわち、オウムガイには黄金比は潜んでいないのである。このオウムガイと黄金比の関係は、都市伝説のように流布されているが、数学できちんと判断すれば間違っていることがわかる。

[3] 名刺のサイズは黄金比

日本の名刺のサイズは、

$55\text{mm} \times 91\text{mm}$ ， $55 : 91 = 1 : 1.65454545$

であり、黄金比とはちょっと違うのではないか。小数点第 1 位までは同じだけど…これも都市伝説かな。

他にも、パルテノン神殿には黄金比があるので美しい、という説が多く語られている。そこで確認してみると、黄金矩形は右図のようになるので、ちょっとこれも無理があると思われる。



世の中で言われていること、ネットで流れている情報を鵜呑みにせず、数学的に論理的に自分の頭で考えることのできる人間になりましょう！

2. 黄金比とは？

さて、黄金比に現れる数 1.618 は、黄金数と呼ばれて、正確な値は、

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

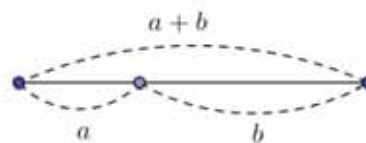
である。この黄金比，黄金数を定義する。

[定義 2] 黄金比

線分を a ， b の長さで 2 つに分割するとき、

$$a : b = b : (a+b)$$

が成り立つように分割したときの比 $a : b$ を黄金比という。



実際に求めてみる。

$$a : b = b : (a+b) \Leftrightarrow b^2 = a(a+b) \Leftrightarrow b^2 - ab - a^2 = 0$$

両辺を $a^2 > 0$ で割ると、 $\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0$

よって、 $\frac{b}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\frac{b}{a} > 0 \text{ より, } \frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{よって, } a : b = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 : \phi$$

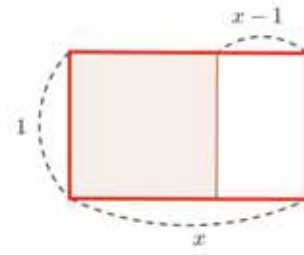
次に、黄金矩形と呼ばれる長方形で定義すると、次のようになる。

[定義 3] 黄金比(黄金矩形)

$x > 1$ のとき、

$$(\text{縦の長さ}) : (\text{横の長さ}) = 1 : x$$

の長方形から、右図のように正方形を取り去った残りの長方形が元の長方形と相似になるとき、 x を黄金比(黄金数)という。また、このような長方形を黄金矩形という。



実際に求めてみる。

$$1 : x = (x-1) : 1 \Leftrightarrow x(x-1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\text{よって, } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x > 0 \text{ より, } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

黄金矩形から取り去る正方形の1辺の長さを半径とする四分の一円を描いてつなげると、先に見た対数螺旋が得られる。

黄金矩形の定義より、残った長方形から正方形を取り去る操作は無限に続けることができる。そして、黄金数 ϕ は無理数である。

[問 9]

- (1) $\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ。
- (2) 黄金数 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ が無理数であることを証明せよ。

パルテノン神殿は、B.C.447年に建設が始まり、B.C.438年に完工したとされる。この時代の数学者としては、ピタゴラス(B.C.582～B.C.496)がいる。ピタゴラスの定理(三平方の定理)で有名であるが、彼は新興宗教とも言える「ピタゴラス教団」の教祖であった。ピタゴラス教団の教義は、「万物は数である」という教えであったが、当時における数とは有理数のことであった。有理数は分数で表せる数、言い換えるとある単位で計り切ることができる数である。そのような時代に、操作が無限に続く、無理数である ϕ を利用してパルテノン神殿を建てたとは、とても思えない。つまり、世の中のいろいろな所に黄金比が潜んでいるという話は、都市伝説であることが多いのである。

[問 10]

黄金矩形と他の長方形を幾つか並べて見てもらったとき、どの長方形を美しく感じる人が多いか調査して考察してみよ。

3. 螺旋とは？

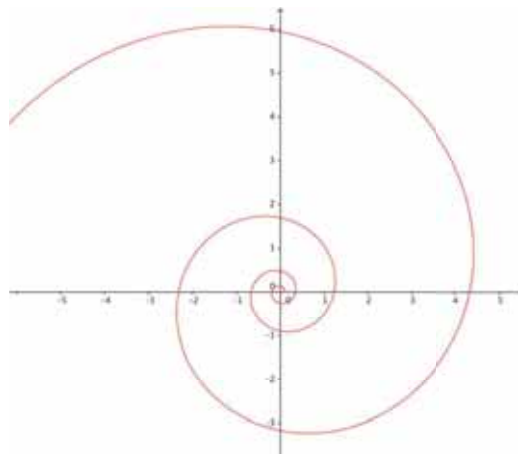
黄金比のところで登場した**対数螺旋**は、次の極方程式で表される曲線である。

$$r = ae^{b\theta} \dots (**)$$

(a, b は定数で、e は自然対数の底 = ネピア数)

例えば、 $a=0.1$, $b=0.2$ のとき、対数螺旋(**)は、右図のような螺旋になる。a, b を変化させれば、また違う形になるように思えるが、自己相似形の曲線である。すなわち、任意の倍率で拡大した対数螺旋は、適当な回転によって元の螺旋と一致するという美しい性質を持っている。

また、対数螺旋は、極方程式の形を見ればこのような名前と呼ばれるのは当然であるが、一方で**等角螺旋**とも呼ばれる。



[課題 14]

等角螺旋の名称は、中心から伸ばした半直線と対数螺旋のなす角が一定であることからきている。このことを証明せよ。

(証明)

極方程式(**)を、直交座標におけるパラメータ表示に書き換えると、

$$x = r \cos \theta = ae^{b\theta} \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta = ae^{b\theta} \sin \theta$$

よって、

$$\frac{dx}{d\theta} = ae^{b\theta} (b \cos \theta - \sin \theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = ae^{b\theta} (b \sin \theta + \cos \theta)$$

ゆえに、対数螺旋の点(x, y)における接線方向のベクトルを \vec{u} とおくと、

$$\vec{u} = (b \cos \theta - \sin \theta, b \sin \theta + \cos \theta)$$

また、半直線の方角ベクトルを \vec{v} とおくと、

$$\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

よって、

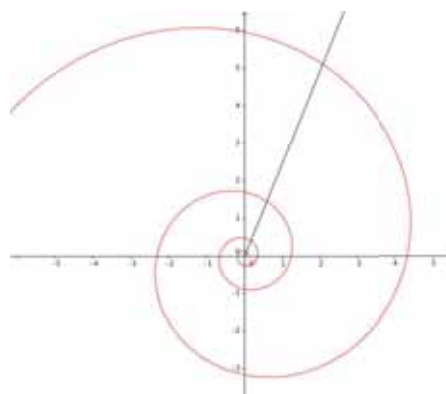
$$|\vec{u}| = \sqrt{b^2 + 1}, \quad |\vec{v}| = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (b \cos \theta - \sin \theta) \cos \theta + (b \sin \theta + \cos \theta) \sin \theta = b$$

ゆえに、半直線と対数螺旋のなす角を α とすると、

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} = \text{一定}$$

(Q.E.D.)



対数螺旋には、このような美しい性質が他にもある。

[問 11]

対数螺旋(**)と中心を通る半直線との交点のうち、隣り合う交点については、原点からの距離の比は一定であることを証明し、その一定の値を求めよ。

[問 12]

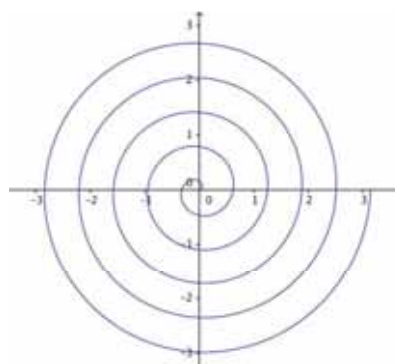
時速 320km もの猛烈な速さで飛ぶハヤブサが、獲物を狙って飛ぶときの飛行曲線は対数螺旋になると言われている。これは、ハヤブサの目は頭の横についているために、正面はよく見えないので、斜めから見て獲物を常に視野に収めて飛ぶからだそうだ。この説が正しいとすれば、ハヤブサの飛行曲線が対数螺旋になる理由を説明せよ。

螺旋には、極方程式

$$r = a\theta \cdots (\star) \quad (a \text{ は定数})$$

で表される螺旋もあり、これを**アルキメデスの螺旋**という。

例えば、 $a=0.1$ のときのアルキメデスの螺旋は、右図のようになる。



[問 13]

アルキメデスの螺旋(☆)と中心を通る半直線との交点のうち、隣り合う交点については、原点からの距離の差は一定であることを証明し、その一定の値を求めよ。

スイスの数学者・科学者ヤコブ・ベルヌーイ(1654~1705)は、対数螺旋について研究し、その美しい性質に魅了されたので、墓石に対数螺旋を彫ってもらおうことを望んだ。しかし、実際には誤ってアルキメデスの螺旋が彫られてしまった…



[課題 15]

等角螺旋は、オウムガイのような軟体動物の殻の断面や、動物の角の形によく現れる。その理由について考察せよ。

大きなオウムガイは、小さなオウムガイを相似拡大したものであり、形が変わらない。オウムガイは、大きくなるにつれて大きな部屋を次々に作って住み替えていく。そのときの部屋の条件は、大きさを増しながら一定の形を保つことである。

この条件には円錐形の殻が当てはまり、そのような殻を作る軟体動物もいる。外周全体の成長速度が同じであれば、円錐形になるのである。ところが、オウムガイは片側ともう片側の成長速度が違うために、円錐がねじれて螺旋形になるのである。つまり、オウムガイに幾何学的な見通しがあるとか、遺伝子に対数螺旋が暗号化されている必要はない。

4. フィボナッチ数列とは？

数学は、科学の言語として自然現象等を解明・説明するのに、大いに役立つ。しかし、前節で少し見たように、何でもかんでも数学のせいにする、数学って凄いだろう、的な理解は間違っている。

黄金比の他にもそのような例として、**フィボナッチ数列(フィボナッチ数)**がある。

[定義 4] フィボナッチ数列

次の漸化式で定義される数列をフィボナッチ数列といい、各項の数をフィボナッチ数という。

$$F_1=1, F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

具体的にフィボナッチ数を求めてみると、次のようになる。

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

フィボナッチ(1170 頃～1250 頃)は、本名をレオナルド・ダ・ピサ(ピサのレオナルド)といい、フィボナッチは「ボナッチの息子」という意味である。フィボナッチは、1202 年に『算盤の書』を発行し、その中でウサギのつがいが増えていく問題を作ったが、そこにフィボナッチ数列が現れたのである。

[課題 16]

フィボナッチ数列の一般項を求めよ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ を求めよ。

$$F_1=1, F_2=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \dots \textcircled{1}$$

において、

$$x^2=x+1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$$

の 2 つの解を $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ とすると、

$$\alpha + \beta = 1, \alpha \beta = -1 \quad \left(\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より、

$$F_{n+2} - \alpha F_{n+1} = \beta (F_{n+1} - \alpha F_n)$$

よって、

$$F_{n+1} - \alpha F_n = (F_2 - \alpha F_1) \beta^{n-1} = \beta^{n-1} \dots \textcircled{2}$$

同様に、

$$F_{n+1} - \beta F_n = (F_2 - \beta F_1) \alpha^{n-1} = \alpha^{n-1} \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3} - \textcircled{2}$ より、

$$(\alpha - \beta) F_n = \alpha^n - \beta^n$$

ゆえに、

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \dots \textcircled{4}$$

また,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - \beta \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} = \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1)$$

さて、フィボナッチ数列の一般項④は、無理数の n 乗の数で表されているが、計算の結果出てくる各項は整数である。ちょっと不思議な感じがする。

また、フィボナッチ数列の隣り合った項の比は、黄金数 ϕ に収束する！この結果もあって、次節で見るようにフィボナッチ数を特別な数とみなす「風潮」がある。

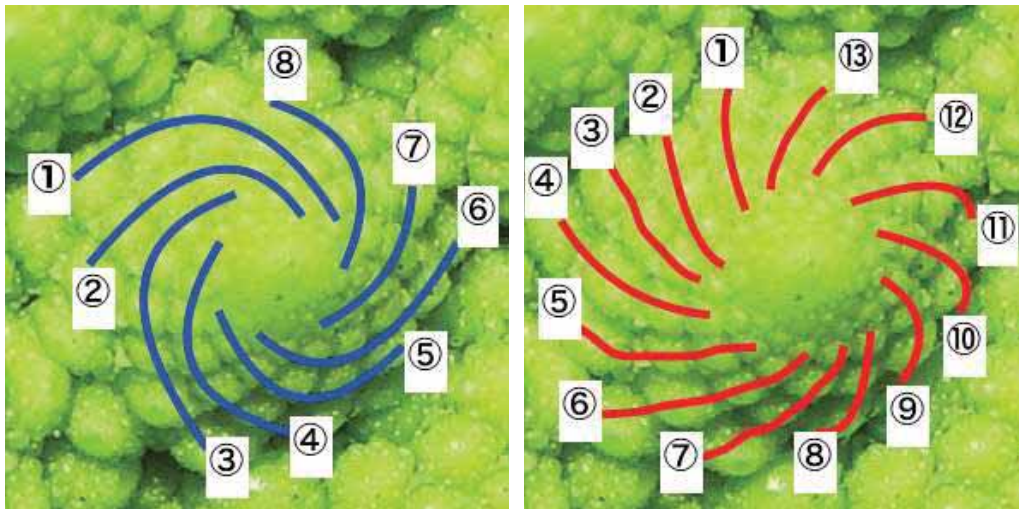
5. フィボナッチと螺旋と葉序の関係は？

右の野菜は、カリフラワーの仲間のロマネスコである。このロマネスコは、見ての通りフラクタル構造(自己相似構造)がはっきりと見える、美しい(?)野菜である。



これだけでも、数学的に素晴らしい野菜であるが、その一部を拡大すると、今度は右回りと左回りの螺旋がくっきりと見えてくる。またまた数学的な構造を持っているというわけだ。

その本数を数えると、8本と13本となる。なんと、これは、隣り合ったフィボナッチ数ではないか！



一般に、花の花弁の数は 3, 5, 8 が多いと言われ、これらもすべてフィボナッチ数である。また、パイナップルや松ぼっくりなどは螺旋を数えられる実を持つが、これらの螺旋の数もほとんど 5, 8, 13 だと言われる。自然は、フィボナッチ数に支配されているのか？

[課題 17]

植物の 80%では、茎についた葉の列は螺旋を描く。葉はそれぞれすぐ下の葉と一定の角度だけずれた所についている。このずれる角度は、多くの種において概ね 137.5° であることが多い。この角度は一体、どこから現れたのだろうか？

定義 2 で、黄金比を線分の比で定義した。そのアナロジーで、円を分割する。すなわち、右図のように、

$$(\text{短い円弧}) : (\text{長い円弧}) = (\text{長い円弧}) : (\text{円周})$$

を満たすように分割したときの、短い円弧に対する中心角を θ とすると、

$$a : b = b : (a+b)$$

これはどこかで見たような・・・， そう， 黄金分割である。ゆえに、

$$a : b = 1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

より、

$$\theta = 360^\circ \times \frac{1}{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 360^\circ \times \frac{2}{3+\sqrt{5}} = 137.5077\dots^\circ$$

と、 137.5° が現れる。この中心角 $\theta = 137.5^\circ$ を、 **黄金角** という。

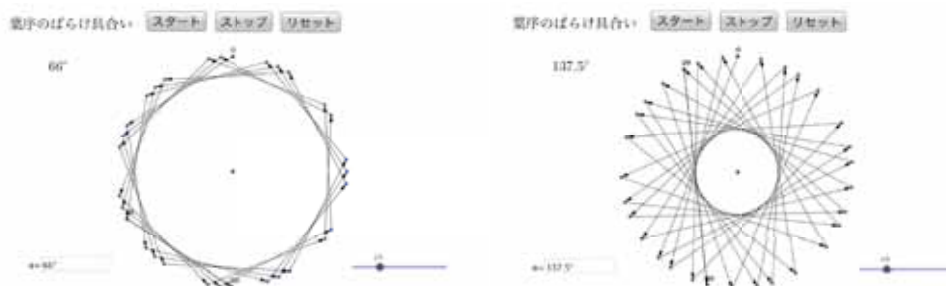
またまた現れた黄金比，そして黄金比に分割された黄金角，これは本当に特別な角度なのだろうか？

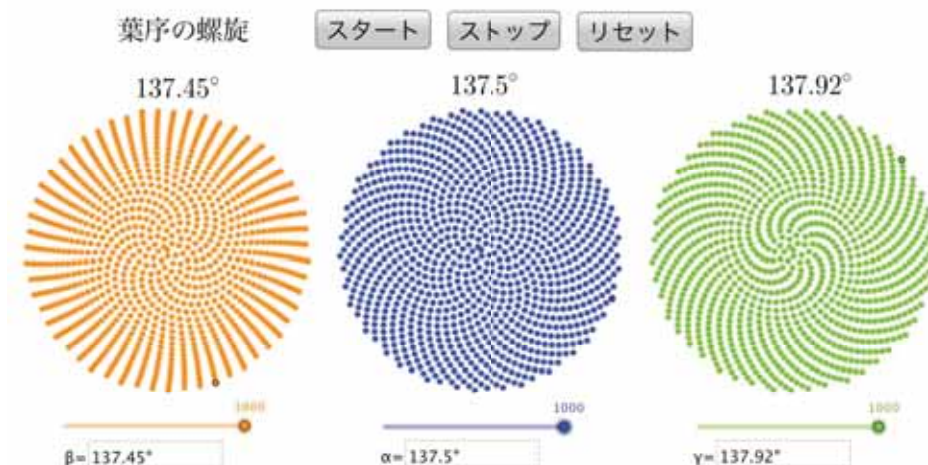


[課題 18]

GeoGebra のファイルを利用して、葉序や小花の詰め込みのシミュレーションを行い、黄金角について考察せよ。

シミュレーションの結果は、次のようになり、黄金角の「神秘性」「偉大さ」が確認できたように思えるが・・・





多くの本やネット上では「以上のようなことから、フィボナッチ数・黄金角の葉序は植物に有利であり、進化の過程でそれを選択した植物が生き残ったのである。なんと素晴らしい！」と解説してある。そして、それを読んで「凄い！ 自然は素晴らしい！」と感激、納得するのである・・・

しかし、これで本当に理解できたのだろうか？

確かに黄金角であれば、葉序は植物に有利そうだ

しかし、その中途半端な $137.5077\cdots^\circ$ を決める原理は何なのだ？

隣り合った葉の原基(葉になる細胞)が、なぜ黄金角だけずれるのか？

それは少しも説明できていないではないか！

ということで、もっと科学的な説明・解明が必要なのである。数学的な操作はしているが、自分の思い込みや思い入れで、自然の中に現れる黄金比、フィボナッチ数を賞賛するのは、数学を科学の言語として理解しているとは言えない。

葉序については、大阪大学の近藤滋先生が、次のような概略の仮説を唱えられている。

まず、葉の原基の形成には、一定濃度以上のオーキシンという植物ホルモンが必要である。古い原基はオーキシンを吸収する(阻害的に働く)ので、新しい原基は古い原基からできるだけ遠くにできる。そこで、次の2つの仮定を立てる。

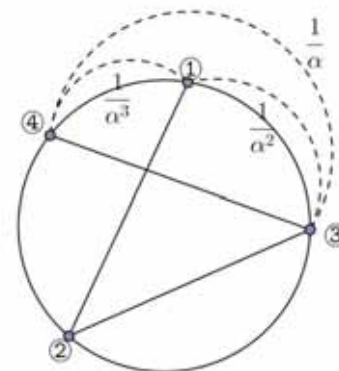
[1] 1つ前の原基の阻害効果は、一定の比率で減衰する

(ただし、4個以上古いものは無視する)

[2] 原基からの阻害効果は、距離に反比例する

以上を図示すると、右図のようになる。

ここで、 α は減衰率である。



[問 14]

近藤先生の仮説に従えば、 $\alpha = \phi$ となることを示せ。

【参考文献】

- P.J.ナーン(訳：細川尋史)(2010) 『最大値と最小値の数学(上)(下)』 シュプリンガー・ジャパン
- 近藤滋(2013) 『波紋と螺旋とフィボナッチ』 秀潤社
- フィリップ・ボール(訳：林大)(2011) 『かたち』 早川書房
- Stefan Hildebrandt, Anthony Tromba(訳：小川泰 他) (1994) 『形の法則』 東京化学同人