氏名（本籍）	原田智世　（京都府）
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	博課第320号
学位授与年月日	平成18年3月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 人間文化研究科
論文題目	面電流と磁場の研究
論文審査委員	（委員長）教授　宮武貞夫　教授　富﨑松代 助教授　柳沢　卓　教授　森本　徹

論文内容の要旨

本論文では、まず三次元空間のなかの閉曲面内を流れる面電流について、曲面が含まれる空間からみた特徴づけを明らかにし、それに関連する数学の定理を証明している。さらにその応用として、トーラス内の平衡磁場を構成している。

面電流とは面上で定義されたベクトル値関数で、次の二つの条件を満たすものである。

(1) 面上の各点で接ベクトルである。

(2) 面上の任意の境界からなる閉じた曲線上の積分は零となる。

面電流が存在すると、その各成分を密度とするニュートンポテンシャルをつくり、空間内でのベクトルポテンシャルとして考えることができる。このベクトルポテンシャルのダイバージェント（発散）は、面の外部及び内部では、常に零であることを定理として証明している。面電流によって生じる磁場は、このポテンシャルのローテーション（回転）で、空間内に定義される。この論文では応用として、トーラスの内部でのみ磁場が生じ外部では磁場が生じないようにするためには、トーラスの表面にどの様な電流を流せば良いかということを調べている。その電流を記述するには、いくつかの数学的な諸定理を詳しく吟味して使う必要がある。

主な結果は、次のようにまとめることができる。

1）すべての面電流は体積電流の極限として表すことができる。

2）面電流とニュートンポテンシャルで作られるベクトルポテンシャルは、その面以外では発散が零である。

3）トーラスの内部にのみ磁場をもつようなトーラス表面上の面電流を求めることができる。

さらに、上の3）を論じるために、基本的な補助定理を考察し、次のような副次的な結果を得ている。

4）ベクトル値関数に対するヘルムホルツの分解定理を詳細に論じるために、ニュートンポテンシャルの二回微分の表現についてまとめた。

5）ディリクレ ノルムが有界な関数族に対する新しい補助定理をまとめている。

6）トーラスの内部で調和でありトーラスの表面では接しているベクトル場が存在するという定理を、上の補助定理を使って、構成的な方法で証明を与えている。

ここで、1）、2）、3）について、4）、5）、6）と関連づけて、説明を補っておこう。

一点にのみ台をもつ超関数として知られている、ディラックのデルタ関数は数理物理学に関連する理論によく現れ、重要な役割を果たしている。これは、空間内に定義された関数列の超関数としての極限として理解できる。その延長として面の上にのみ台をもつ1）に述べた面電流も超関数の1つであり、空間内で定義された電流の列の極限としてとらえることができる。この論文では、このことを厳密に考察している。他方、現実的には、トーラスにコイルをまいて電流を流すと磁場ができることはよく知られていて、有効なコイルの巻き方はをみつけることは実際の大事な問題である。現実のコイルは厚みをもつことになるので、極限をとって面電流になるまえの体積電流とみなすことができよう。この論文では、トーラスの内部にのみ磁場が生じ、外部には磁場がでないような面電流が存在することが示されている。このような磁場を平衡磁場と呼ばれる、このような平衡磁場を生じさせる電流は、量的に効率性の面のみならず質的な意味で大事であると思われる。このような平衡磁場が生じる面電流は次にようなものである。6）で定まる調和ベクトル値関数の境界上の制限と単位外法線との外積として得られる面上のベクトル場を考えよう。これが3）で求めている面電流であることが示されている。この面電流に対するニュートンポテンシャルは、2）の一般論より、トーラスの表面以外では発散がもちろん零である。また、内部ではこの面電流に対するニュートンポテンシャルの回転で定義される磁場は、トーラスの外部では零であり、内部ではもとの6）で定まる調和ベクトル場に等しいことが示されている。この証明に、5）の補助定理を使われている。

平衡磁場を生じさせるトーラスの表面の面電流は、内部の調和ベクトル場の境界への制限を使って表現できる。それ故に、調和ベクトル場の構成は、大事である。特に近似計算ができるような考察が必要であろう。ここで与えている存在証明は、境界条件をみたす滑らかな関数列のディリクレノルムが最小になるような極限である。しかし極限に近付くためには、各関数から適切な定数を引いて新たに列を作り治す操作がもとめられる。5）で述べた補助定理は、その操作に関連しているので応用上有用であると思われる。

論文審査の結果の要旨

一点にのみ台をもつ超関数として知られている、ディラックのデルタ関数は数理物理学に関連する偏微分方程式の理論によく現れ、重要な役割を果たしている。特に定数係数の線形微分方程式において有用な働きをしている。それは、空間の均一性を考慮すると、原点における考察が空間全体に同等な効果を与えることからきている。しかし原点の一点とはいうものの、厳密に言えば、一点の無限小の近傍の考察がもとになっている。すなわち、極限として一点にのみ台をもつもので、これは、空間内に定義されたその点の近傍に台を持つ関数列の超関数としての極限として理解できる。この考え方の延長として面の上にのみ台をもつ超関数をその面の近傍に台を持つ関数の列の超関数としての極限として考えることができる。しかし、この場合の関数列はいろいろなクラスに制限して考えることが出来る。ここでは、体積電流と呼ばれる空間内の発散が零であるベクトル値関数のクラスを採用して、その極限として、面電流を定義している。この考え方は、偏微分方程式の理論のなかでは、これまで正面から考察されることが少なかったと言える。一般に、抽象理論よりも現実の実験等の方が先行していることもよくあることである。面電流もこの場合にあたり、トーラス等にコイルを巻いて電流を流すことがモデルである。コイルに流す電流は、実際には少し厚みをもった体積電流であり、コイルの性能の向上と共に少しずつ面電流に近付くのであると考えられる。ここでは、極限の面電流がたしかに存在しそれに近付く方法もあるのだということが、理論的に大事である。このことを本論文は肯定的に解決している。

この論文で考察したもう一つの、数学的な考え方として、ベクトル値関数の直交分解がある。これは任意の二乗可積分のベクトル値関数は、その関数空間のなかで、勾配ベクトルと回転ベクトルに一意的に直交分解できるという定理である。ここでは、この定理をトーラスの外部では零であるような区分的に滑らかな関数に適用している。実際の現象では、ベクトル値関数は急に零にはならず、ある不連続面の近くの小さい幅をもった領域の壁を経て次第零になるのであろう。すなわち、数学的には滑らかな関数の極限ととらえることができる。このような考え方から、実際のヘルムホルツの分解を調和ベクトル場に適用すると、極限の表現として、調和ベクトル場はある面電流で決まるベクトルポテンシャルの回転すなわち磁場として表現できることがわかる。

一見、別のものとして考えられる解析学の定理の中に考え方として共通のものが含まれていることが多い。また、これらを繋ぐものとして解析の基礎となっているものは、実数の完備性である。実数の完備性は、

1）コーシ列は収束列であるという一点の無限小近傍が無限に高密度である事を示す局所的な性質、

２）任意の有界閉集合はコンパクトであるという大域的な性質、

３）連続関数に対する中間値の定理のような、言わば、中間的な性質

まで、多様な形で、解析学のなかに至る所に現れている。それは、ビッグバンに対応して宇宙全体に均等に存在する背景放射のようなものともいえる。特になんとなく曖昧な形で証明が不明瞭な場合、実数の完備性を意識的に用いることにより、理論が明確化される。実際に、この論文において、トーラス内の調和ベクトル場の存在を示すときに使われた補助定理は、実数の完備性の中間的な表現のひとつである、「有界閉集合での連続関数は必ず最小値をもつ」という定理に依存して証明されている。導関数の積分量で元の関数の積分量を評価することを論じるこの補助定理は、いわゆるコンパクト性についてのポアンカレやレーリッヒの定理よりも有効なもので、調和ベクトル場の存在の証明に大変適している。フビニの定理と関連させて次元の異なる量のあいだの関係を導くために、このような単純な定理を持ち出すことは一種の発想の転換を必要とするが、それを支援するものは実数論に対する理解と親しみだと言える。実数の完備性は上に述べた各種のタイプの同等な表現に姿を変えて、解析学において主要な働きをしている。微分積分基本公式をはじめとして、局所から大域への働きの例としては、リーマン面やより一般的なシーフの構成の際の考え方がある。評価式に関するこの補助定理は、実数の完備性の中間的なタイプの表現を用いて大域的な結果を得るものである。実際現象としては明らかに認められるが数学的に厳密な証明を与える事は容易ではないという、他の同様の局面でも、有力な働きをすると思われる。

論文の前半の内容は、奈良女子大学人間文化研究科の紀要に2005年９月に投稿して、出版予定である。また、この論文は部分的には、申請者によって大阪市立大学でのシンポジウム等で講演されている。この論文の内容は勿論、そこに使われた種々の数学的な結果は有用なものであり、いくつかの部分に分けて学術雑誌に投稿の準備をしている。奈良女子大学の博士（理学）の学位論文として十分な内容であると判断される。