幾何と表現の問題

幾何と表現の問題

奈良女子大学文学部付属高等学校
香　川　　稔
（協力者）岡　田　セ　イ　子
勝　田　礼　子

豊かな表現能力を養うことは，各教科を通じてなされる教育の大きな目標である。数学科においても，学習指導要領に，次のように示されている。

数学を学習する目標の一つは「数学的な用語や記号を用いることの意義について理解を深め，それらによって，数学的な性質や関係を簡潔，明確に表現したり，思考したりする能力を伸ばす。」ことであると。

日常生活の場において，ものごとを数学的にとらえたり，数学で学習した知識や技能を用いたりすることによって，表現を簡潔，明確にすることができるのであるから，数学を学習すること自体が，簡潔，明確に表現する力を養うことにつらなるわけである。

しかしここでは，数学の学習の場において用いられる表現のみを取り上げて，考えてみることにする。ただ，表現だけを切りはなして考えることができない面があるので，内容の把握のしかたに関係することが含まれてくることも，やむを得ないであろう。

数学における概念，原理，法則の理解や，数学的な考え方，処理は，すべて，表現を通じてなされることが多い。したがって学習の場で用いられる表現のあり方が，学習効果をあげるか否かに少なからぬ影響を与えるのは当然である。そこで先ず，次のようなことをとりあげて考えてみたいと思う。

数学の学習の場で用いられている表現は望ましいものであるかどうか。

さて，学習の場で用いられている表現が，望ましいものかどうかを検討するには，望ましい表現とは何であるかを明らかにしなければならない。

◎ 望ましい表現とは何か

学習の場で用いられる表現は，真理を，理解したりさせたりするなかだちとなっているものである。従って，伝えようとする真理を，相手に的確に把握させる力を持っていなければならない。

そのために，必要だと思われる要素をあげてみると，次のようになる。

(1) 明確さ　(2) 簡潔さ　(3) 平易さ　(4) 厳密さ　(5) 正確さ　(6) 論理性　(7) 的確さ

ここで (1) 明確さというのは「何をいわんとしているか」がはっきりわかることである。人によって受け取り方が違うような曖昧な表現は明確さがないといわねばならない。

(2) 簡潔さとは理解を能率的にするために不用なことばはもちろんのこと，本質とは余り関係がないような部分を，けずり取ってしまってあることである。

(3) 平易さとは相手の能力を考えて，それにふさわしいような，理解しやすい言いあらわし方にしてあることである。

(4) 厳密さとは起りうるすべての場合を考慮してあって，ごまかしやとりこぼしのないことである。これはむしろ，内容の把握のしかたに関係するものである。

(5) 正確さとは間違った部分や正しいかどうかがはっきりしない部分が含まれていないことである。

(6) 論理性とは筋が通っておることである。論理に飛躍があったり，根拠のあいまいなものから導き出したりするようなことがなく，話の進め方に必然性があることである。

(7) 的確さとは本質をしっかり把握していて，重要である所とそうでない所の区別がはっきりついており，強調すべき所を強調していることである。写真的な表現でなく，絵画的な表現をすることである。

以上のべた諸要素は，互に有機的なつながりをもつものであって，一つ一つきりはなして考えることはできない。明確にすれば平易になることもあり，簡潔にしすぎて，明確さが失われることもある。厳密さに固執すれば簡潔さ

がそこなわれることにもなり，平易にせんがために，厳密さを犠牲にすることもありうるわけである。

従って，それぞれの場に適応して，最も望ましい表現をするためには，上のいろいろな要素を適当におりこんで，うまく調和させなければならない。

それが的確さにあたるともいえるのである。しかし，何といっても，大切なことは本質をしっかり把握していることである。核心をしっかりつかんでいなければ的確な表現ものぞめないことである。

◎ **教科書の表現**

さて，ここで，表現という立場から，教科書をのぞいてみた場合，問題となる点を二，三あげてみよう。

（Ⅰ） 三平方の定理（ピタゴラスの定理）

先ず，この定理がどのように表現されているかを，現在使用されているいくつかの教科書について調べてみると，次のようになる。

(イ) 直角三角形の直角をはさむ二辺の上の正方形の面積の和は，斜辺の上の正方形の面積に等しい。

(ロ) 直角三角形の斜辺を一辺とする正方形の面積は，他の二辺をそれぞれ一辺とする正方形の面積の和に等しい。

(ハ) 直角三角形の直角をはさむ二辺をそれぞれ一辺とする正方形の面積の和は，斜辺を一辺とする正方形の面積に等しい。

(ニ) 直角三角形の斜辺を一辺とする正方形は，他の二辺をそれぞれ一辺とする正方形の和に等しい。

(ホ) $\angle A=\angle R$の直角三角形ABCにおいて，斜辺BCの上の正方形の面積は，他の二辺の上の正方形の面積の和に等しい。すなわち$BC^2=AB^2+AC^2$

(ヘ) 直角三角形では，直角をはさむ二辺の上の正方形の面積の和は，斜辺の上の正方形の面積に等しい。

(ト) 直角三角形の直角の二辺の長さをa，bとし，斜辺の長さをcとすれば，$a^2+b^2=c^2$

(チ) 直角三角形の斜辺の平方は直角をはさむ二辺の平方の和に等しい。

(リ) 直角三角形の斜辺の平方は二辺の平方の和に等しい。

(ヌ) 直角三角形の斜辺の平方は，他の二辺の平方の和に等しい。

これらのうち，(イ)(ヘ)には，「直角をはさむ二辺の上の正方形」という所に明確さが足りず，(ニ)では面積を省略した所に厳密さが失われている。(リ)では単に「二辺の平方」とした所に難点がある。しかし，他はいずれも，明確，簡潔，平易な表現といえる。しかし，(ホ)(ト)のように具体的な記号を用いていいあらわしたのは簡潔であるが，これを一般化して個々の場合に適用することが的確に行われるかどうか疑問である。この定理を直角三角形の重要な性質として，生徒に理解させようとする場合，的確さにおいて優劣はないだろうか。問題になるのは，「斜辺を一辺とする正方形」という表現と「斜辺の平方」という表現の比較である。

私は「斜辺の平方」の方に軍配をあげる。

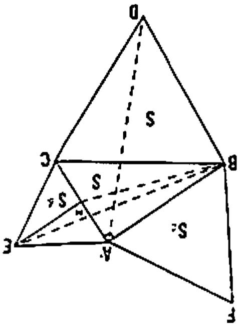
その第一の理由として，この定理が応用されるのは，「辺の長さの関係」を規定している所であること。したがって中線定理，余弦法則，二点間の距離の公式，などを導きだす場合にも$a^2=b^2+c^2$の関係が使われるのであって，正方形の面積という概念はでてこない，ということである。

第二の理由として，この定理は，三辺の上に画く図形が正方形に限らず，正三角形の場合でも，半円の場合でも，一般に相似な図形でさえあれば常になりたつものであって，正方形という所に特別な意味があるのではない（たまたま正方形の面積が一辺の平方によって表わされるということに意味があったのであろう。）ということである。しかし，一辺の平方とあるのを一辺の平方根とか，一辺の立方とかになおすと，この関係はもはやなりたたないのである。

次に，斜辺を先に出すか，直角三角形をはさむ二辺を先に出すかについては，鈍角三角形や鋭角三角形の辺の関係をのべる場合，余弦法則への拡張などを考えて，斜辺を先に出した方がよいと思う。さらに，この定理が直角三角形についてのみなりたつことを強調して，次のようにのべるのが最も望ましいと思う。

直角三角形においては，斜辺の平方は他の二辺の平方の和に等しい。

横道にそれるが正三角形の場合になりたつことについては，直接証明することもできるのである。



（証明） $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle ACE$, $\triangle ABF$の面積を順にS, Sa, Sb, Scで表わす。
ACの中点をMとすれば$\angle EMA=\angle R$となり$AB//EM$

$\therefore\ \triangle MBE=\triangle MAE$

$\therefore\ \triangle BCE=\triangle BCM+\triangle ACE$

$=\frac{1}{2}S+Sb$

また$\triangle BCE\equiv\triangle DCA$

$\therefore \triangle DCA=\frac{1}{2}S+Sb \cdots\cdots (1)$

同様にして　$\triangle DBA=\frac{1}{2}S+Sc \cdots\cdots (2)$

(1)+(2)より　$S+Sa=S+Sb+Sc$

$\therefore\ Sa=Sb+Sc$

（II） 長方形の定義について

教科書から，長方形の定義をひろい出してみると，次のようなのがある。

(イ) 等角四角形（等角四辺形）をいう。
(ロ) すべての内角が等しい四辺形をいう。
(ハ) 平行四辺形の中で，一角の直角なものをいう。
(ニ) 四つの角がいずれも直角な四角形をいう。
(ホ) 四つの内角がすべて直角である四角形をいう。
(ヘ) すべての角が直角な四辺形をいう。

この中でどれがいちばん的確といえるだろうか。

(ロ)のように内角と特にことわらなくても誤解される心配はないであろう。四つの角が等しいことから，ただちに，直角が導き出されるのであるが，長方形を書いたり，またその性質を考えようとする場合，先ず直角という点に注目することや，ある四辺形が長方形か否かを議論する場合も，角の相等よりも，角が直角であることに着目することなどから考えて，直角を強く印象づける定義の方が望ましいのではなかろうか。厳密にいえば，三つの角が直角ということで十分なのであるが，どの角をとっても直角になっていることを強調する意味で，過剰定義にはなるが，$\boxed{\text{すべての角が直角}}$と定義する方がよいと思われる。

（III） 台形や等脚台形の定義について

教科書から，ひろい出してあげてみると，次のようになる。

(イ) 一組の対辺だけが平行な四辺形を台形といい，台形で平行でない二辺の等しいものを等脚台形という。
(ロ) 一組の対辺が平行な四辺形を台形といい，台形の中で平行でない二辺の等しいものを等脚台形という。
(ハ) 一組の相対する辺が平行な四辺形を台形といい，AD//BCである台形 ABCD でAB=CDであるものを等脚台形という。
(ニ) 一組の対辺が平行な四辺形を台形といい，AD//BCである台形で$\angle B=\angle C$であるものを等脚台形という。

これをみると，台形や等脚台形の解釈に二つの考え方があることがわかる。

(イ)は，台形の中に平行四辺形を含めず，等脚台形の中に長方形を含めない考え方で，「だけ」という助詞でそれをはっきり示している。(ニ)は台形の中に平行四辺形を含め，等脚台形の中に長方形を含める考え方で，平行四辺形と等脚台形を区別するために，辺の相等を用いず角の相等で等脚台形を規定している。(ロ), (ハ)は表現があいまいで，(ロ)では平行四辺形は台形の中にはいるが，長方形が等脚台形の中にはいらず，(ハ)では平行四辺形も等脚台形の中に含まれることになる。

台形の中に，平行四辺形を含めない場合は，台形を取扱う場合に，いちいち他の対辺の平行でないことをことわらなければならない煩雑さが残る。等脚台形の中に長方形を含めない場合も，等脚台形を取扱う際に，それが長方形ではないことをことわる煩雑さがつきまとう。平行四辺形が等脚台形と区別できないような表現は明らかに不都合である。

従って，台形，等脚台形の定義の表現としては，(ニ)が最も的確であると思われる。

（IV） 三角形の相似条件について

相似条件のうち，二角と三辺についてのべたものをあげてみよう。

〔二角について〕

(イ) 二組の対応する角が等しいとき。
(ロ) 二組の対応する角がそれぞれ等しいとき。
(ハ) 対応する二つの角がそれぞれ等しいとき。
(ニ) 対応角が等しいとき。
(ホ) 一つの三角形の二つの角がそれぞれ他の三角形の二つの角に等しいとき。
(ヘ) 一方の三角形の二角が他の三角形の二角にそれぞれ相等しいとき。
(ト) 二つの角がそれぞれ等しいとき。

〔三辺について〕

(チ) 対応する辺の比がすべて等しいとき。
(リ) 対応する三組の辺の比が等しいとき。
(ヌ) 三組の対応する辺の比が等しいとき。
(ル) 三辺の比がそれぞれ相等しいとき。
(オ) 対応辺が比例すれば。
(ワ) 三つの辺の比が等しいとき。

先ず問題になるのは，「対応する」ということばである。対応する角や辺は，相似であることが確認されてはじめてきまるものであって，二つの三角形が相似であるかどうかを調べようとする際に，対応する辺や角を考えるのはおかしいのである。（場合によっては，特定の辺や角を前以て対応させておくこともあるが，相似条件というものは，そういう場合にだけ使うものではない。）「二つの三角形が相似であるとき，対応する角はそれぞれ等しい」といういい方は妥当であるが，「対応する二角がそれぞれ等しいとき，二つの三角形は相似である」という表現は妥当ではないと思われる。

(ホ)，(ヘ)の表現は厳密ではあるが，冗長すぎるのではなかろうか。〔二角について〕では多少明確さに欠けるが(ト)の表現が受け入れやすいように思われる。

(ル)のそれぞれということばの使い方は，おかしい。〔三辺について〕では(ワ)が無難ではなかろうか。

次に生徒の用いる表現および表現能力について，その実情を調べてみよう。

生徒の表現

これに関して，次のような調査を行なった。

〔〔テスト１〕〕……簡潔さに関するもの

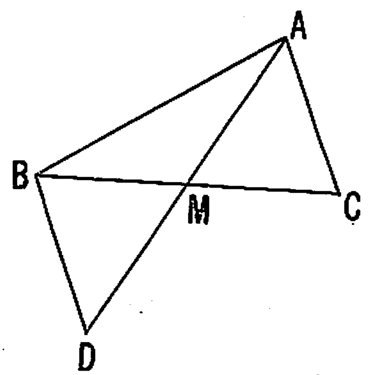
ねらい

(1) 記号や，数式を適当に使って，表現を簡潔にすることができるかどうか。
(2) 不用な部分を見つけ，それを取り去ることによって，表現を簡潔にすることができるかどうか。
(3) まわりくどいやり方でなく，すっきりした解き方によって，表現を簡潔にすることができるかどうか。

問題 a

「A，B，Cを頂点とする三角形の辺BCの中点Mと頂点Aを結んだ線分の長さの２倍は，ABと AC の長さの和より小さいことを証明せよ。」の解を次のように書いた。

これをできるだけ簡潔にして，わかりやすい形に書きあらためよ。



（証明）

BからACに平行にひいた直線とAMのMの方への延長との交点をDとする。

A，M，Cを頂点とする三角形とD，M，Bを頂点とする三角形において辺BMの長さと辺CMの長さは等しい。半直線MA，MCのなす角は，半直線MB，MDのなす角に等しい。（これは二直線

が交わったときにできる四つの角のうち隣らない二角であるから)。
また直線ACと直線ADとが平行であるから，半直線AC，AMのなす角は半直線DB，DMのなす角に等しい。（これは平行な二直線に一直線が交わったときできる錯角だから)。また，上と同じ理由で，半直線CA，CMのなす角と，半直線 BM，BD のなす角とは等しい。以上により二つの三角形は合同条件を満足することになって合同である。ゆえにBDとACの長さは等しく，MDとAMの長さが等しい。A，B，Dを頂点とする三角形において二辺の和は第三辺より大きいからABとBDを加えた長さはADの長さより大きい。BDとACとは等しいからABとACを加えた長さはADより大きい。ADはAMとMDを加えたものでAMとMDの長さは等しいから，ADの長さはAMの2倍である。ゆえに，AMの長さの2倍はABとACの長さの和より小さい。

望ましい解答

BからACに平行にひいた直線とAMの延長との交点をDとする。
△AMCと△DMBにおいてCM＝BM
∠AMC＝∠DMB（対頂角だから）また，AC//DBだから∠ACM＝∠DBM（錯角）
∴△AMC≡△DMB　∴AC＝DB，AM＝DM
△ABDにおいてAB＋BD＞AD　∴AB＋AC＞2AM

評価の観点

(1) △，＝，∠，//，≡，＞の記号を使ったり，それを用いた式表現ができているかどうか。
(2) 用語（対頂角）を使うことができたかどうか。
(3) 合同条件で，不要の条件（角一つ）を取り去ることができたかどうか。

結　果

このテストを中学2年生男女各50名について実施した結果を整理すると次のようになる。

	中学2年		
	男子(50名)	女子(50名)	計（100名）
(1) が不十分なもの	6	3	9
(2) が不十分なもの	8	10	18
(3) が不十分なもの	22	30	52

所　感

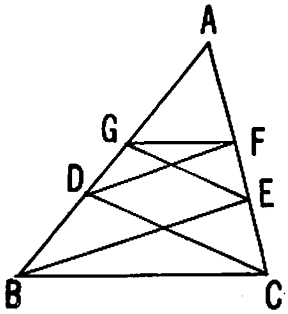
記号を用いたり用語を用いたりすることは，だいたいできるのであるが，内容にたちいって簡潔にすることは，まだまだ不十分である。

問題 b

「三角形ABCの辺AB，ACの上の任意の点をそれぞれD，Eとする。DからBEに平行な直線をひき，ACとの交点をF，EからCDに平行な直線をひき，ABとの交点をGとすれば，三角形AGF と三角形ABCが相似になることを証明せよ」の解を次のようにかいた。これをできるだけ簡潔で明確になるようにかき改めよ。

〔証　明〕

三角形ADFと三角形ABEとにおいて，直線DFと直線BEとが平行であるから，∠ADFと∠ABE とは平行線と一直線とが交わるときにできる同位角であるから等しく，また，∠AFD と∠AEBも平行線の同位角であるから等しく，また∠GAFと∠BAC とは共通であるから，二つの三角形は相似条件を満足しているから三角形ADF と三角形ABEとは相似である。ゆえにAD：DF：AF＝AB：BE：AEである。



これをかきなおすと$\frac{AD}{AB}=\frac{DF}{BE}=\frac{AF}{AE}$

また，三角形AGEと三角形ADCとにおいて，GEとDCとが平行であるから，∠AGEと∠ADCは等しく∠AEGと∠ACDとは等しく，また，∠GAEと∠DACとは共通であるから，前と同じように，三角形AGEと三角形ADCとは相似である。ゆえに

AG :GE : AE＝AD : DC : AC　　ゆえに$\frac{AG}{AD}=\frac{GE}{DC}=\frac{AE}{AC}$　　これよりAG＝$\frac{AD \cdot AE}{AC}$，GE＝$\frac{DC \cdot AE}{AC}$

また上の式よりAD＝$\frac{AB \cdot DF}{BE}$，AF＝$\frac{AD \cdot AE}{AB}$ゆえに，AG : AF＝$\frac{AD \cdot AE}{AC}$: $\frac{AD \cdot AE}{AB}$＝AB:AC

ゆえに，GFとBCとは平行になって，∠AGFと∠ABCは等しく，∠AFGと∠ACBとは等しく，∠GAFと∠BACとが共通であるから，三角形AGFと三角形ABCとは相似である。

望ましい解答

△ABEにおいてDF//BE

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AE}$………(1)

△ADCにおいてGE//DC

$\therefore \frac{AG}{AD}=\frac{AE}{AC}$………(2)

(1)×(2)より$\frac{AG}{AB}=\frac{AF}{AC}$………(3)

(3)と∠Aが共通であることより，

△AGF∽△ABC

C 評価の観点

(1)　△，//，∽，∴の記号を使ったり，それを用いた式表現ができているかどうか。

(2)　AD＝$\frac{AB \cdot DF}{BE}$，GE＝$\frac{DC \cdot AE}{AC}$の二式を取除いているかどうか。

(3)　$\frac{AD}{AB}=\frac{DF}{BE}=\frac{AF}{AE}$，$\frac{AG}{AD}=\frac{GE}{DC}=\frac{AE}{AC}$の真中の式を取り除いているかどうか。

(4)　△ADFと△ABEの相似を，二角だけで判定しているかどうか。

(5)　AD : DF : AF＝AB : BE:AEと$\frac{AD}{AB}=\frac{DF}{BE}=\frac{AF}{AE}$のうち一方を取り除くことができたかどうか。

(6)　△AGFと△ABCの相似を一角とそれをはさむ二辺の比で判定することができたかどうか。

(7)　$\frac{AG}{AB}=\frac{AF}{AC}$の関係を，$\frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AE}$，$\frac{AG}{AD}=\frac{AE}{AC}$を辺々掛け合わせて，導き出すことができたかどうか。

(8)　$\frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AE}$を△ADFと△ABEの相似によらず，DF//BEから直接導き出すことができたかどうか。

結　果

このテストを高校1年生男女各50名および，中学3年生男女各50名について，実施した結果を整理すると次のようになった。

（標準以下のもの）	高　1			中　3		
	男(50人中)	女(50人中)	計(100人中)	男(50人中)	女(50人中)	計(100人中)
(1) が不十分なもの	0	0	0	6	4	10
(2) ができなかったもの	10	20	30	28	34	62
(3) ができなかったもの	24	35	59	38	48	86

(4) ができなかったもの	8	25	33	27	30	57
(5) ができなかったもの	6	13	19	27	25	52

(標準以上のもの)	高 1			中 3		
	男(50人中)	女(50人中)	計(100人中)	男(50人中)	女(50人中)	計(100人中)
(6) ができたもの	22	11	33	6	6	12
(7) ができたもの	4	1	5	3	0	3
(8) ができたもの	9	1	10	0	0	0

所 感

(1) 記号，数式の使用は，このテストに関しては申し分のないできばえであった。

(2) 不用な部分を取去ることができなかったものが意外に多い。明らかに不用であることがわかっている部分すら取除けなかったものが男子に20%，女子に40%いた。ある事柄のうち一部が不用であって，一応は不用かどうかの判断を必要とするものを取除けなかったものは，男子で約50%，女子で約70%の多数にのぼっている。このことは，答案を見直しててんけんすることを怠るものの多いことを示すものである。

(3) 表現の内容にまで立ち入って，まわりくどいやり方をすっきりした解法になおそうとしたものは，きわめて少ない。これらの少数の者は，すべて学力の優秀なものである。

(4) 女子は男子に比べて，簡潔化の能力がかなり劣っているように思われる。

〔〔テスト2〕〕………明確さに関するもの

ねらい

(1) 説明がおちていて，不明瞭な所を明確にすることができるかどうか。

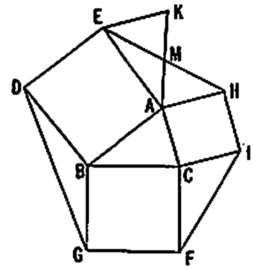
(2) 説明が足りない所を補って，明確にすることができるかどうか。

(3) 必要な事柄を省略したため，説明に飛躍が感じられる所を補うことによって，内容を明確にすることができるかどうか。

問 題

「△ABCの外側に正方形ABDE，BCFG，CAHIを作る．$DG^2+FI^2+HE^2$を△ABCの三辺であらわせ。」この解答を下のようにかいた。不明瞭な所，脱落している所をおぎなったり，不都合な所を訂正したりして，明確な解答にかき改めよ。

〔解〕



AM=MK　EM=MH　EK//AH

∠KEA+∠EAH=∠BAC+∠EAH

∠KEA=∠BAC

ABとACはAEとEKとに等しいから

AK=BC

AB=a，BC=b，AC=cとおけば

$AM=\frac{b}{2}$

△EAHにおいて中線定理により

$EH^2=2a^2+2c^2-b^2$　$EH^2+DG^2+FI^2=3(a^2+b^2+c^2)$

〔望ましい解答〕

EHの中点をMとし，AMの延長上にAMに等しくMKをとれば，四辺形AHKEは平行四辺形

∴EK$\mathrel{/\!/}$AH

$\therefore \angle KEA + \angle EAH = 2\angle R$

また$\angle BAC + \angle EAH = 4\angle R - \angle R - \angle R = 2\angle R$

$\therefore \angle KEA = \angle BAC$………(1)

また$AE = AB$, $EK = AH = AC$………(2)

(1), (2)より$\triangle AEK \equiv \triangle BAC$

$\therefore AK = BC$

$AB = c$, $BC = a$, $AC = b$とおけば

$$AM = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$$

$\triangle EAK$に中線定理を用いると

$$EA^2 + EK^2 = 2(EM^2 + AM^2)$$

$$\therefore c^2 + b^2 = 2\left(\frac{EH}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$\therefore EH^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$………(3)

同様にして$DG^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$………(4)

$FI^2 = 2b^2 + 2a^2 - c^2$………(5)

(3)+(4)+(5)より$EH^2 + DG^2 + FI^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

(注) 最初の部分を「AHに平行でAHの長さに等しくEKをとれば四辺形AHKEは平行四辺形 $\therefore EM = MH$, $AM = MK$」としてもよい。

評価の観点

(1) 補助線についての説明ができたかどうか。

(2) 四辺形AHKEが平行四辺形になることを示したかどうか。

(3) $\angle BAC$と$\angle EAH$が補角であることをかきしるしたかどうか。

(4) $\triangle AEK$と$\triangle BAC$の合同であることをかきしるしたかどうか。

(5) 中線定理を明確にかきしるしたかどうか。

(6) DG^2, FI^2をa, b, cを用いて，かき表わしたかどうか。

結　果

このテストを高校1年生男女各50名について，実施した結果を整理すると次のようになる。

	高校1年		
	男(50人中)	女(50人中)	計(100人中)
(1) 補助線の説明ができなかったもの	6	14	20
(2) 平行四辺形であることをかかなかったもの	1	13	14
(3) 補角であることを示さなかったもの	9	18	27
(4) 合同であることを示さなかったもの	4	15	19
(5) 中線定理を明確にかかなかったもの	10	28	38
(6) DG^2, FI^2をかかなかったもの	7	25	32

所　感

(1) 平均して，男子は約12%のものが，女子は約38%のものができていない。男女の差がかなり大きいように思われる。

(2) 三角形の角と辺の表わし方について，$\angle A$の対辺をaとせず，隣辺をaとしたことに抵抗を感じたものは皆無であった。

(3) 〔テスト１〕の成績がよかったものは〔テスト２〕の成績も大体よかったようである。〔テスト１〕〔テスト２〕とも，その成績を５，４，３，２，１で表わして（主観的ではあるが）各人についての点数のずれを調べてみると，次のようになる。

	男女計100名のうち
点数のずれが　０のもの	３１名
点数のずれが　１のもの	４４名
点数のずれが　２のもの	１３名
点数のずれが　３のもの	１２名
そ　の　他	なし

(4) 〔テスト１〕と〔テスト２〕の合計点を求め，これと数学の学力との関係を調べてみると，次のようになる。これによると，本質の把握が的確で理解が確実でなければ，表現も簡潔，明確になりがたいということになる。

学力の評価 / テストの点	4	5	6	7	8	9	10
4	1	2	3	5		1	
5			4	3	2	1	
6		1	5	6	5	2	
7			2	5	9	2	
8					3	6	
9				3	4	4	4
10					3	9	5

〔〔テスト３〕〕（論理性に関するもの）

ねらい

(1) 推論の根拠があいまいであること。すなわち，前提に無関係なことを結論としてあげてあることに気がつくかどうか。

(2) 逆，裏，対偶と，もとの命題との関係が理解できているかどうか。

問題

次にのべてあることがらで，アンダーラインの部分は正しいものとして，それから導き出される結論が正しいかどうかを調べよ。正しいものには「正しい」と書き，正しくないものは，なぜ正しくないかを簡単に説明せよ。

(1) 色の黒い人には，黄色の洋服がよく似合う。私は色が黒い。だから，黄色の洋服がよく似合う筈だ。

(2) 彼女がハンケチをプレゼントするのは，必ず，その人が好きなときである。彼女は思いやりがあって美しい女性である。私の友人A氏は，彼女になみなみならぬ好意をよせている。A氏は勇気があって親切である。A氏は彼女にハンケチをプレゼントした。ところが彼女は，私にハンケチをプレゼントした。彼女は私が好きなのである。

(3) 人間は必ず死ぬ。動物も必ず死ぬ。だから人間は動物である。

(4) 美しいものは人に愛される。愛することができる人は仕合せである。彼女は美しい。彼女は私を愛している。だから私は仕合せである。

(5) 彼は「昨日休んだのは病気であったからだ」と言った。彼はしばしばうそをつく男である。だから，彼が昨日病気で休んだというのもうそである。

(6) 鹿にはつのがある。あの木の下にいる動物にもつのがある。だから，その動物は鹿である。

(7) 20才未満のものは，たばこを吸ってはいけない。しかし僕はもう20才以上である。だから，僕はたばこを吸ってもよい。

(8) きちょうめんな人は時間をよく守る。彼女は決してきちょうめんな性格とは言えない。だから，彼女は時間を守らないにちがいない。

(9) 彼女は先生におこられないと勉強しない。彼はいま勉強している。彼は先生におこられたにちがいない。

(10) 私の両親を喜ばせるには，私は彼とつき合うことを両親は喜ばない。だから，両親を喜ばせるには，私は彼とつき合わないようにすればよい。

(11) 彼が犯人ならば，5日の午後3時に大阪駅にいなければならない。そうだとすれば，5日の午後3時には，彼は大阪駅と名古屋駅の両方にいたことになる。これは不合理である。だから彼は犯人ではない。

望ましい解答

(1) 正　（三段論法）　(2) 正（三段論法）
(3) 不正（前提と結論が無関係）　(4) 不正（前提と結論が無関係）
(5) 不正（不十分な前提から結論をくだしている。）　(6) 不正（逆を使っている。）
(7) 不正（裏を使っている。）　(8) 不正（裏を使っている。）　(9) 正（対偶）
(10) 正　（対偶）　(11) 正（帰謬法）

評価の観点

結論の正，不正を正しく判断しているかどうか。

結　果

高校1年男女，各50名および中学3年男女各50名について実施した結果は次の通りである。

問題番号 ＼ 正誤・性別	高校1年 正答 男(50)	正答 女(50)	正答 計(100)	誤答 男(50)	誤答 女(50)	誤答 計(100)	無答 男(50)	無答 女(50)	無答 計(100)
(1)	45	35	80	5	15	20	0	0	0
(2)	43	45	88	6	3	9	1	2	3
(3)	43	28	71	7	20	27	0	2	2
(4)	47	42	89	3	6	9	0	2	2
(5)	49	50	99	1	0	1	0	0	0
(6)	50	48	98	0	1	1	0	1	1
(7)	10	4	14	40	44	84	0	2	2
(8)	40	44	84	9	5	14	1	1	2
(9)	37	31	68	13	17	30	0	2	2
(10)	18	21	39	31	28	59	1	1	2
(11)	34	32	66	16	11	27	1	6	7

中学 3 年 (100名)							
正誤 / 性別 / 問題番号	正答			誤答			無答
	男 (50名)	女 (50名)	計 (100名)	男 (50名)	女 (50名)	計 (100名)	計 (100名)
(1)	40	41	81	10	9	19	0
(2)	44	47	91	6	3	9	0
(3)	36	31	67	14	19	33	0
(4)	40	38	78	10	12	22	0
(5)	49	48	97	1	2	3	0
(6)	46	43	89	4	7	11	0
(7)	6	3	9	44	47	91	0
(8)	37	31	68	13	19	32	0
(9)	38	36	74	12	14	26	0
(10)	24	37	61	26	13	39	0
(11)	37	34	71	13	16	29	0

所　感

(1) 問題の(1)(2)は同じ種類の問題で，論理的にはむしろ(2)が複雑であるのに，(1)の誤答が多い。これは結論そのものの常識的な判断が論理的な判断に先行したためと思われる。

(2) 問題の(3)，(4)は同種類の問題であるが，(3)の方に誤答者が多いのは，結論の真実さに注意が向けられて，論理的判断がおろそかになったためである。

(3) 問題の(7)と(8)は，どちらも前提の裏を前提として結論を下したものであるが，(7)が著しく不出来なのは，現在の法規の常識として，20才未満のものは，たばこを吸ってはいけないということが，20才以上のものは吸ってもよいということを認めることになっているので，それを前提として考えたがためである。(7)を正答できたものは論理的な判断力があると判定してよいだろう。

(4) 問題の(9)，(10)，(11)で誤答のものが意外に多いのは，結論そのものの常識的な判断が論理的考察に先行したためであろう。特に(10)では自分たちの意見が大いに影響しているようである。

(5) 以上のようなわけで，このテストでは論理性を評価するには，余りにも他の要素がはいりすぎていて，信頼できる結果がなかったのであるが，反面から見れば，生徒が論理的に物を考えないということを示すものである。論理上のあやまりをおかすというよりも，むしろ，論理的に物を考えようとしないということである。
数学上の問題について，論理性をみようと試みたこともあるが，結果の正否のみを問題にして，それを導きだした過程の論理的な考察などには殆ど注意が向かないということがわかった。

〔〔テスト 4 〕〕…緻密さに関するもの

ねらい……起りうるすべての場合をもれなくいいあらわすことができるかどうかをみる。

問　題　次の問題の解法に不完全な所，間違っている所があれば指摘せよ。

(問)　円 0 がある。その周上に，円周の$\frac{1}{6}$に等し$\overset{\frown}{AB}$(，円周の$\frac{1}{8}$に等しく$\overset{\frown}{CD}$)をとる。AC，BDの交点をPとすれば∠APBは何度か。

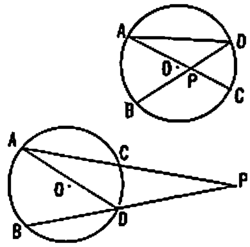
(解)　$\overset{\frown}{AB}$)の上に立つ円周角$=\frac{1}{2}\angle ABO=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$ $\overset{\frown}{CD}$)の上に立つ円周角$=\frac{1}{2}\angle COD=\frac{1}{2}\times 45^\circ=22.5^\circ$

△APDにおいて，∠APB＝∠PDA＋∠PAD＝ABの上に立つ円周角＋$\overset{\frown}{CD}$の上に立つ円周角$=30^\circ+22.5^\circ=52.5^\circ$

望ましい解答 不完全である。∠APB＝30°－22.5°＝7.5°となる場合もあるから。

結　果 高校1年男女各50名の中で正解者わずかに5名であった。

所　感 時間不足のせいもあるが，あらゆる場合を考えてみるだけの力の余裕がまだないということになる。



((テスト5))……記述させるもの

ねらい ……解答を記述させて，その表現の中にどのような難点があるかをみようとするものである。

問題い ……長方形とはどんな四辺形であるか説明せよ。（用語）

結果と所感

(1) 中2(100名)を対象としたもの

(イ) 条件が適当なもの……（14名）

- 四つの角が直角…5名，三つの角が直角…2名
- 四つの角が皆等しく直角…2名
- 一角が直角である平行四辺形…5名

(ロ) 条件が多すぎるもの…(65名)

- 対辺がそれぞれ相等しく角がすべて直角…15名
- 対辺が平行で角がすべて直角………5名
- 対辺が平行で相等しく角がすべて直角…27名
- 対辺が平行で相等しく対角線が他を二等分し，角が直角……11名
- 対辺が等しく平行四辺形で角が直角…5名
- その他2名

(ハ) 条件が足りないもの（12名）

- 対辺が等しい5名
- 対辺が平行で等しい6名
- その他1名

(ニ) 間違った条件を加えたもの…（9名）

(2) 中3（50名）を対象としたもの

(イ) 条件が適当なもの…（16名）

(ロ) 条件が多すぎるもの…（33名）

(ハ) 条件が足りないもの…（1名）

(ニ) 間違った条件を加えたもの…（0名）

（注） ことば使いで，相対する辺を対応する辺とのべたものが50名中11名もいたがこれは相対する辺と解釈した。

中2，中3とも(ロ)条件が多すぎるものが非常に多いが長方形を他の図形と区別する本質的な性質と，他の図形と共通する性質との区別ができないのは的確な答とはいえない。

問題ろ ……三平方の定理とはどんなものか説明せよ。（定理）

結果と所感

(1) 男女計100名のうち，誤答のもの　4名

(2) 斜辺ということばを使わなかったもの5名（一番長い辺，直角頂の対辺）

(3) 厳密にのべんとしてぎこちなくなった表現
（直角をはさむ二辺の各々の長さの平方，二辺を各々一辺としてつくる各々の正方形，直角頂をはさむおのおのの辺，他の二辺のおのおのの辺）

(4) 図と式だけで表現したもの　14名
図だけを文章にかきそえたもの　5名
式だけを文章にかきそえたもの　3名
図と式を文章にかきそえたもの　24名

問題は……定線分ABを斜辺とする直角三角形PABのBPの延長上に$PQ=\frac{1}{2}AP$なる点Qをとるとき，Qの軌跡を求めよ。（軌跡）

評価の観点　表現法をみるために，一応みんなが，考え，解ける問題としてやさしいものをえらび，なおヒントとして「∠AQBについて考えるように」と与えた。

① 軌跡の証明に，必要条件，十分条件の両方をしているかどうか。（厳密さ）
② 定角を証明の上で，どのように表現し，用いているか。（明確さ）
③ 軌跡の限界を吟味しているかどうか。（厳密さ）
④ その他，推論に飛躍や，まちがいがないか。（論理性）

結　果

望ましい解答のできていたもの，高2の生徒45名のうち		2名
①	十分条件を証明していないもの	4名
②	（い）∠AQBを定角とだけしたため十分条件の証明の曖昧であったもの	10名
	（ろ）$\tan\alpha=2$なる角αを60°としてまちがったもの。	15名
③	（い）$\overset{\frown}{AB'}\overset{\frown}{AB''}$の限界をとらなかったもの	38名
	（ろ）ABに関して一方の側のみをとったもの	8名
④	推論に飛躍やごまかしのあるもの	4名
⑤	簡潔さに欠けるものとして軌跡の解にその作図法をのべたもの	1名
	$\tan\alpha=\frac{1}{2}$なるとき∠R－αを含むとしたもの	1名

所　感

① 軌跡の証明に必要な，十分条件のないものが4名もあつたのは残念である。
② 表現法をどのようにするかねらった箇所の定角の表わし方，用い方にやはり一番問題があった。定角になることがわかっていても表現がまずいために，逆の証明に曖昧さ，ごまかし等が多くみられた。それと同時に∠AQBを60°とした間違いが予想外に多かったのにびっくりした。
③ 限界の吟味は殆どがやっていない。一度解が出たあとで，充分吟味してみる厳密さが欠けている。
④ 推論に飛躍，ごまかしのあるものが4名あった。
⑤ 望ましい解答のできていたものが，ただの2名であったことは遺憾であった。その原因は，限界をたしかめる厳密さに不足しているためである。

問題に　定点Aを通り，かつ定円Oに，その周上の点Bにおいて接する円をつくれ。〔作図〕

評価の観点

① 作図法がみつかっても，それを文章として的確に表現できているかどうか。（的確さ）
② 吟味が十分になされているか。（厳密さ）

結　果　二年の一学級45名の解答結果は

① 作図法の表現のまずいものの例をあげてみると

「OBを結ぶ延長上の直線を引く」「直線OBをつくる」

「OBを延長した線分上に」「ABに垂直二等分線をたてる」

② 吟味として

◦「BにおいてはOBに立てた垂線上にAがあるとき解なし」としていないもの	31名
◦「円０上に，AがBと重ならないであるとき解なし」としていないもの	40名
◦「AがBと重なるとき解無数」としていないもの	31名

所 感

① みんなが一応解答し得る問題としてやさしいのをえらんだため，作図の表現は一部の者を除いてよくできた。自分の書いた図のみで方法をのべているために，「OB又はその延長」とするところを「OBの延長」とのみしている者，「OB」とのみしている者が多い。すなわち厳密さが足りないのである。

② すべての場合を尽くして吟味するのはむつかしいが，不備の者が非常に多い。

以上述べたように，生徒の用いる表現や表現能力についての調査は，テストの問題の不適切やその他の原因で，期待した成果は得られなかった。

しかし，生徒の表現の未熟であること，その未熟さは，内容の理解，本質の把握の不十分さのためであることは，はっきり知ることができた。

それでは，内容の理解，本質の把握の不十分さは，何に原因があるのであろうか。それは，やはり，学習の場で用いられる表現にあるように思われる。

幾何と表現の問題

幾何すなわち図形の性質の研究は，本来，理解しやすく興味ののもてる学科である。

図を書くという作業を通して学習ができ，直観がきき，しかも図形の神秘的な性質を論理的に解明していって，一つの体系を組み立てていくのであるから，親しみや興味を感じない筈はなく，また理解が困難になる筈もないのである。

ところが実際は，むつかしい学科，面白くない学科として多くの生徒から敬遠されている。その原因が，表現特に記述形式のわずらわしさにあることは間違いないと思う。記述のわずらわしさが理解をおくらせ，理解の不十分さが，記述をますますわずらわしくさせているのである。優秀な生徒でも幾何の学習に非常に多くの時間をとられることを訴えるのは，記述のわずらわしさを如実に示しているのではなかろうか。

それでは，幾何の学習の場で用いられる表現特に記述がわずらわしく感じられるのは，どんな点だろうか。

それに対して次のようなことがあげられる。

(1) 厳密さをたっとぶあまり，文章が長くなったり，ぎこちなくなったり，また難解になったりする。

(2) 伝統的な，形式を重んじたものものしいかき方が残っている。

(3) 重要な所とそうでない所の区別をつけず，同じような調子でかき流していく。すなわち論理の骨組を明確にし，しかもそれを強調する的確さが足りない。

(4) 図は単なる参考とみて，文章の代用とは考えない面がある。

そこで痛感されることは，幾何では，記号や数式の使用が代数に比べて，おくれているということである。指導要領にもある通り，記号や数式を適切に用いることによって，表現を簡潔，明確にすることができるのである。

文章表現を簡潔にしすぎると，明確さ厳密さが失われる危険性がある。

記号や数式を用いれば，簡潔になるばかりでなく，明確さ厳密さも増してくるのである。記号や数式を用いて，表現を簡潔，明確にし，さらに，的確さに意を用いれば，学習の能率を著しく高めることができるであろう。

記号化

幾何で現在使われている記号のおもなものは，次の通りで，その数は代数に比べて非常に少ない。

$\angle$, $\angle R$, $\triangle$, $/\!/$, $\perp$, $\equiv$, $\backsim$, $\square$, $\frown$

この他に，どんなものをどんな風に記号化すればよいだろうか。記号についての大切な条件をあげると，次のようになる。

(1) 直観で，何を意味しているかがわかる。

(2) 他と区別しやすい。

(3) かき方が簡単である。

(4) 標準的なよみ方が定まっている。

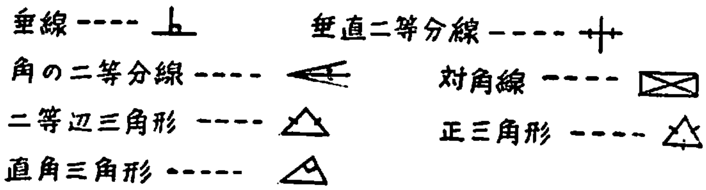
上にあげた記号はすべて，この条件をみたしている，ただ∠AOBというかき方および読み方は，的確ではないと思う。これを$\angle O^{A}_{B}$（角OABとよむ）とかくようにすれば，どんなにわかりやすくなるだろう。

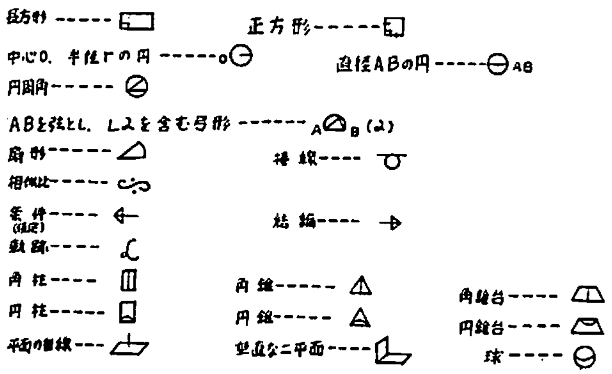
それでは，問題や解答の記述の中で，ひんぱんにでてくる用語や述語についてどれを記号化すればよいか，またどのように記号化すればよいか私見をのべてみることにする。

〔用語について〕

直線AB……$\overleftrightarrow{AB}$，直線ABのAの方への延長……$\overleftarrow{AB}$

AB,CDの交点……（AB,CD），点Aと直線BCとの距離$\overline{A,BC}$，平行線AB,CDの距離……$\overline{AB//CD}$





〔述語について〕

∠AOBと∠CODは対頂角だから等しい……$\angle O^{A}_{B} = \angle O^{C}_{D}$

∠Aと∠Bは平行線の同位角で等しい……∠A＝∠B

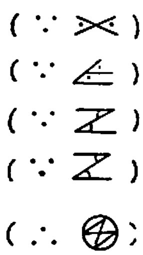
∠Aと∠Bは平行線の錯角で等しい……∠A＝∠B

ABとCDは錯角が等しいから平行である……AB//CD

∠Aと∠Bは同じ弧の上に立つ円周角であるから等しい。

……∠A＝∠B

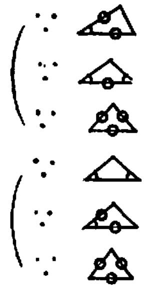
A,B,Cは同一直線上にある。……$\overleftrightarrow{A,B,C}$



AからBCの長さに等しくADをとる。……AD(＝BC)をとる
AからBCに垂線ADをひく。　　……AD(⊥BC)をひく。
AからBCに平行線ADをひく。　　……AD(//BC)をひく。

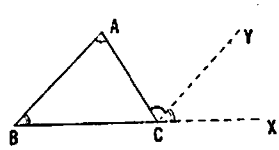
△ABCと△ABCは {二辺と夾角 / 二角と夾辺 / 三辺} がそれぞれ
等しいから合同である。　　……△ABC≡△A'B'C'

△ABCと△A'B'C'は {二角がそれぞれ / 二辺の比と夾角 / 三辺の比}
が等しいから相似である。　　……△ABC∽△A'B'C'



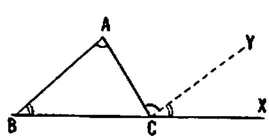
△ABCと△A'B'C'は相似の位置にある ……　$\triangle ABC |\!\sim\!| \triangle A'B'C'$
AとBとは直線ℓについて線対称である。……　A ⋈ B ($\overleftrightarrow{\ell}$)
AとBは点0について点対称である。　……　A ⋈ B (0)
AはBであるための必要十分条件である。……　A ⇄ B
（AとBとは同値である）
点Pの軌跡はABを弦とし∠αを含む弓形である。　……　∠P ⇄ $_A$◎$_B$ (α)

このような記号を使って，証明問題や軌跡の問題の解答を実際にかいてみよう。
（例１）……定理の証明について
《現在のかき方》
三角形の内角の和は２直角である。
（証明）　△ABCの頂点Cを通り，
図のようにABに平行な直線CYを引き，また，BCの延長をCXとする。
このとき



∠A＝∠ACY(錯角)
∠B＝∠XCY(同位角)
∴∠A＋∠B＋∠ACB＝∠ACY＋∠XCB＋∠ACB＝2∠R

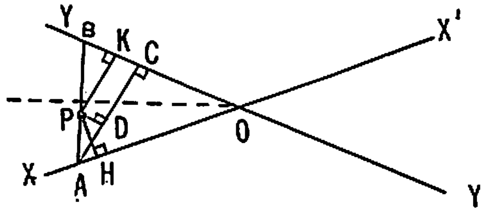
《新しいかき方》
△の∠の和＝2∠R
（証明）



CY(∥BA)をひき
$\overrightarrow{BC}$をCXとすれば
$\angle A = \angle C^{A}_{Y}$　　(∵ Z)
$\angle A = \angle C^{Y}_{X}$　　(∵ ∠＝)
$\angle A + \angle B + \angle C^{A}_{B}$
$= \angle C^{A}_{Y} + \angle C^{X}_{Y} + \angle C^{A}_{B} = 2\angle R$

（例２）…軌跡について
《現在のかき方》

相交わる二つの定直線XOX′，YOY′にいたる距離PH，PKの和が一定hである点Pの軌跡を求めよ。



(解)二直線で分けられた平面の四つの部分のうち，∠XOYの部分に点Pがある場合について考えてみる。

(1) 条件に適する点をP，Pから直線OX，OYにおろした垂線の足をそれぞれH，Kとすれば，PH＋PK＝hである。Pを通りXOYの二等分線に垂線を引きOX，OYとの交点をそれぞれA，Bとすれば△OABは ABを底辺とする二等辺三角形となる。Aから OBに下した垂線の足をC，PからABに下した垂線の足をDとする。二つの直角三角形APH，PADにおいて，斜辺APは共通，また，BC，PDは平行であるから∠HAP＝∠OBA＝∠DPA

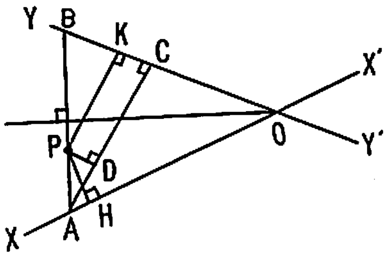
∴△APH≡△PAD　∴PH＝AD

そしてPDCKは明らかに長方形であるから，DC＝PK

∴AC＝AD＋DC＝PH＋PK＝h　よって，AはOX上の定点（直線OYからの距離がh）で，Pは定まった線分ABの上にある。（(2)は略）

≪新しいかき方≫

∝P(PH＋PK＝h，PH⊥$\overleftrightarrow{XOX'}$ PK⊥$\overleftrightarrow{YOY'}$)を求めよ。



(1) 図のようにPから∠O$^{X}_{Y}$の≪に⊥APBをひけば

△OABは△ AC(⊥OB)，PD(⊥AC)をひく。

△APH＝△PAD　（∵AP共通

∴PH＝AD　　　∠A^{P}_{H}＝∠B^{O}_{A}＝∠P^{D}_{A}

（∵BC//PD)）

PDCKは□　∴DC＝PK

∴AC≡AD＋DC＝PH＋PK＝h

∴Aは定点(∵OX上にあって$\overline{A,OY}$＝h)

∴Pは定線分$\overline{AB}$上にある。((2)は略)

（注意）

(1) 図は左側にかく。（その方が見やすい）

(2) 図の説明は原則としてはぶく。

(3) 各段階ごとに，得られた結果を左側にかき，その理由の説明は右側に（∵をつけて記す。（論証の大きな流れを強調するために）

生徒の表現能力

最後に生徒の表現能力をいかにして伸ばすかについて考えてみよう。

的確な表現には，内容の的確な把握が先行しなければならない。ところが，現状では，学習の場で用いられる表現，特に記述形式のわずらわしさが，内容の理解，把握のさまたげとなっている。従って，これを簡潔，的確，平易にすることが先決問題ということになる。これが解決して，内容の理解，把握が十分できるようになれば，学習の場においても，簡潔，明確，的確な表現を訓練する機会を多く見出すことができるであろう。

結び

以上のように，表現という大きな問題に取り組んでみたものの，微力にして，その一端すら明らかにできなかった。ずい分ひとりよがりな意見も多いと思う。

しかし，表現を簡潔，的確にしようとする動きは，いろいろな方面でみられるもので，時代の大きな要求ともいえる。今後とも表現の問題特に簡潔さに関心を持ちたいと思う。