

Nara Women's University

関数のグラフの知覚特性について

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 奈良女子大学文学部附属中・高等学校 公開日: 2010-11-09 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 松本, 博史 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10935/2303

関数のグラフの知覚特性について

数学科 松本博史

はじめに

(1)
我校の標準学力テストの関数分野の検討によって明らかになった点は、関数の性質とそのグラフのもつ性質が結びつきにくいことである。たとえば、中学二年生で $y = -8x + 2$ において $x > 5$ に対応する y の範囲を求める問題において、グラフを利用することで容易に解決されるものを誤まった手段である $x > 5$ の不等号の向きで判断して、 $x = 5$ に対応した y の値ということで等号の処理と不等号の処理を同一視し、代数的な計算で終わっている。中学三年生についても、1次、2次、3次関数の各々について、 x が増加するときに y の増減を調べる問題で、グラフを想起すると容易にわかるものが正答率が低い。高校一年生についても、二次関数のグラフと二次不等式の解の集合との関係が理解されていない。このように、関数についての問題解決にあたり、そのグラフを利用することがなせ思いつかないのかという疑問がこの小論の動機である。

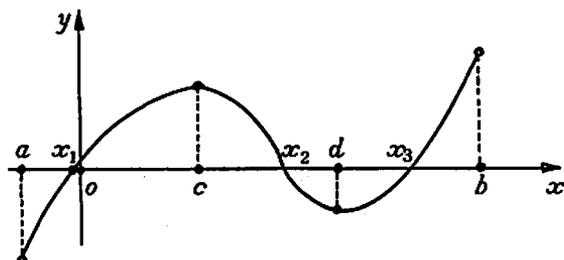
〔問題と目的〕

関数のグラフを観察してその数学的な性質を看取するのは、心理学的には「既知の対象や出来事を喚起する」再生心像(R)⁽²⁾に対応し、特に「静止の再生心像(RS)」にあたるのであろう。その再生すべき対象としてのグラフは平林一栄⁽³⁾のいう「規約的表記」であり、ストリヤール⁽⁴⁾によれば、「独得の言語であり、すべての言語と同じように意味がはっきりつかめるように特別学習されねばならない」記号的直観性を持っている。そして「この記号的直観性の手段は規約による記号の体系であるが、それをを用いることによって、物体や現象の過程の学習しようとする側面が諸性質から分離された純粋な形で示される」ことになる。その「純粋な形」で示される関数のグラフとはいかなるものを表記するのか、数学教育では関数のグラフをどう考えるべきであるか。

グラフとはいってもなく関数関係を表す関係Rに対し集合 $\{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$ を表現する方法である。三輪辰郎⁽⁵⁾によれば「対応する値の組のすべてをいわば外延的に表現」して「値の変化の様相を直観しうる」ようにしたものである。だから「グラフは関数の表現であって、その表現によって何かを明らかにし、つかまなくてはならないのである」「関数の考えといわれるものは、この表現を通して明らかにし、つかむ内容を意味している。だから、いわば表現を通してその底にあるものといえるだろう」、ゆえに数学教育において、関数とグラフは「グラフそのものでなくて、それによって明らかにされる変化の様相をいかにつかむかである。つまり、グラフをいかに内容的に読むか」という指導が必要になるとしている。そこで我々は、関数のグラフのいかなる「内容」が読み取りやすく、いかなる「内容」が読み取りにくいかを明らかにするのがこの小論の目的である。

問 題

右の図からできるだけ多くの数学的性質を読みとって下さい。(6)



対 象

上の問題を、学年末の期末考査の数学のテストの一題として出題した。白紙解答は除いた。

調査日	対象(人数)	男		女	
		理系・文系	理系・文系	理系・文系	理系・文系
S 52年1月	高三(120名)	37	22	21	40
S 52年8月	高二(122名)	34	28	14	46
S 53年1月	高三(118名)	32	26	11	44

(ただし、昭和52年の高二の文理の別は高三になってからの類型である。)

反応の分類について

生徒達のグラフに対する反応は種々雑多であるが、我々がこの研究にとりあげたのは、

- ① 定義域は区間 $[a, b]$
- ② $x = x_1, x_2, x_3$ で値 0 (方程式)
- ③ 区間 $[a, x_1)$ (x_2, x_3) で負の値
区間 (x_1, x_2) (x_3, b) で正の値 (不等式)
- ④ $x = a$ で最小値、 $x = b$ で最大値
- ⑤ 区間 $[a, c)$ 、 $(d, b]$ で増加
区間 (c, d) で減少
- ⑥ $x = c$ で極大、 $x = d$ で極少

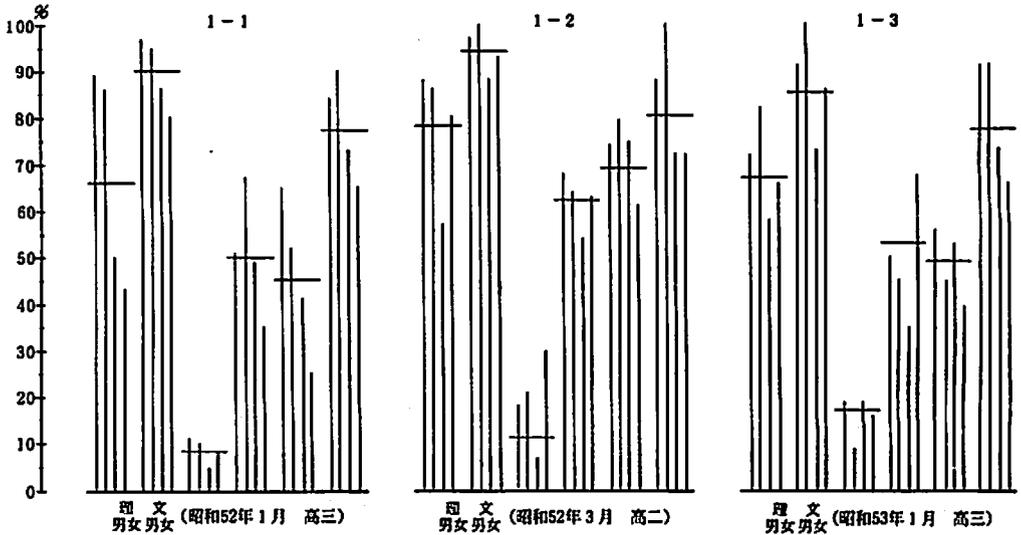
の六項目である。種々の反応の中から上の六項目についてののみ正反応の有無とその反応順序について調査した。反応の表現方法については今回の調査対象とはしなかった。

表1が反応の有無をまとめたものであり、表5が反応順序をまとめたものである。

(結果と分析)

1. 反応率について

表1 年度、学年、類型、男女別の反応数と反応率



		小計	定義域	方程式	不等式	最大最小	増減	極大極小	小計	定義域	方程式	不等式	最大最小	増減	極大極小	小計	定義域	方程式	不等式	最大最小	増減	極大極小
理系	男	37	33	36	4	19	24	31	34	30	33	6	23	25	30	32	32	29	6	16	18	29
	女	21	18	20	2	14	11	19	14	12	14	3	9	11	14	11	9	11	1	5	5	10
文系	男	22	11	19	1	13	9	16	28	16	25	2	15	21	20	26	15	19	5	9	15	19
	女	40	17	32	3	14	10	26	46	37	43	14	29	28	33	44	29	38	7	30	17	29
計		120	79	107	10	60	54	92	122	95	115	25	76	85	97	113	76	97	19	60	55	87
%			66	90	8	50	45	77		78	94	21	62	69	80		67	85	17	53	49	77

反応率の高いものから順に高三では52、53年とも、①方程式、②極大極小、③定義域、④最大最小、⑤増減、⑥不等式 の順序で反応している。高二では、④増減、⑤最大最小 と順位が入れ替わっている。

表2 各学年における増減に対する反応

表 2-1	○	×	
52年高二	85	87	122
52年高三	54	66	120
	189	108	242

$$\chi^2(1) = 15.06 \quad P < 0.001$$

表 2-2	○	×	
52年高二	85	37	122
53年高三	55	58	113
	140	95	235

$$\chi^2(1) = 10.74 \quad P < 0.005$$

表 2-8	○	×	
52年高三	54	66	120
53年高三	55	58	113
	109	124	233

$$\chi^2(1) = 0.815 \quad P > 0.05$$

○……「増加減少」に反応あり
 ×……「増加減少」に反応なし

そこで、高二から高三になると「増減」に対する反応が低下すると言えるかどうかを検定する。表2-1は異質な対象で高二と高三で有意な差があることを表している。表2-2は高二の生徒が高三になると「増減」に対する反応が低下するのが有意であることを表している。表2-8は52年高三と53年高三の「増減」に対する反応数には有意な差がないことを表している。

以上のことから、「増加減少」に対する反応は同質、異質の対象にかかわらず、高二から高三になると減少することがわかる。この原因としては、高次の二学期（この調査の三ヶ月前）に微分法を学習し、極大値、極小値を求める際に、増減を調べるから記憶に新しいからであろう。（増減は中学三年ですでに学習している）それが、高三になり、一年後には知識の強化もなく、記憶も薄らぐであろう。反応率の低下は文系女子が著しい。

各学年で最も反応率が高いのは「方程式」、すなわち、 x 軸とグラフの交点である。この概念は中学二年生以来、直線と x 軸、中三、高一での放物線と x 軸との関係というように、くり返して学習しているから最も慣れ親しんでいることになる。また、視覚的にも、基準となる水平な x 軸に対して、従方向の曲線との交わりであるから知覚されやすいこととその交点に x_1 、 x_2 、 x_3 と文字が記されていることにもよるであろう。

次に反応率が高いのは、「極大、極小」についてである。この8割近くの反応率の高さは数学的な概念のとりえやすさよりはグラフの形態によるのではないだろうか。上に凸、下に凸となる図形は「山」と「谷」に類似しており「かたち」としては見やすい。数学的な概念としては「増加から減少」、「減少から増加」に移る点として極大、極小を教えており（近傍での最大値、最小値という見方を強調していない）増加、減少の反応とは呼応していないことから、数学的な概念のとりえやすさを示すものではないと考えられる。（「増減」と「極大極小」の概念の関係は後出P.12）

最も反応率の低いものは、関数値の符号の変化に関する概念である。

「不等式」に関する反応が最も少ないのは、不等式は代数的な性質として処理され、生徒達に獲得されている。現在、不等式については小学校での大小関係、中1での集合 $\{x \mid x < 5\}$ を自然数の集合 N で求めることから始めて 中二で一次不等式、高一で二次不等式を学ぶが、いずれの場合も代数的な処理が優先されている。特に高一で二次不等式を学ぶのは一般の二次関数のグラフを学習する前であるから、グラフから不等式の解の集合を求めることが出来ないことが「不等式」の反応の低い理由であろう。

視覚的には x 軸（基準）より「上にある部分」、「下にある部分」と知覚されやすいと考えられるが、それを抽象化して関数の符号の変化に対応させることが困難であると考えられる。その原因としては、「手がかり」がないことによるのではないだろうか。たとえば、「定義域」は x 軸上で両端点が a, b である「手がかり」があり、「方程式」は x 軸との交点 x_1, x_2, x_3 という「手がかり」がある。「最大、最小」は図形（グラフ）の「最高点」と「最低点」、「 $x = b, a$ 」でという「手がかり」がある。「増減」はグラフが右上り、右下りという「手がかり」がある。「極大、極小」については「山」と「谷」という図形的な「手がかり」がある。関数の符号の変化（不等式）にはこの種の図形的「手がかり」がないことが反応率の低い原因であろう。これはグラフを描くときに、点 (x, y) をプロットしていく従来からの指導法による欠陥であると考えられる。この欠点を補う指導法として菊池乙夫⁽⁷⁾の指導法が考えられる。我々は「プロット法」と「菊池の方法」とを実験的に比較した。その結果関数値の変化を明確にするのは「菊池の方法」がすぐれていることが明らかになった。⁽⁸⁾

このように、不等式に対する反応の低さは現行の関数のグラフに対する指導法の一側面を明らかにしてはいただろうか。

2. 理系文系差及び男女差について

表3は表1の反応率を角変換法による分散分析を行った結果、有意差のあるものを示したものである。

表 - 3

	変 動 因	定義域	方程式	不等式	最大最小	増 減	極 値
52 年 高 三	1. 理 文	米 米	米			米 米	
	2. 男 女						
	3. 1 2 の交互作用				米		
52 年 高 二	1. 理 文	米 米	米	米			米 米
	2. 男 女						
	3. 1 2 の交互作用						
53 年 高 三	1. 理 文		米 米				米
	2. 男 女		米				
	3. 1 2 の交互作用						

米米…… 1%水準 米…… 5%水準

各学年とも男女差は、53年度高三の「方程式」に対する反応を除いてすべて有意差はない。
表1-8より男女差のある「方程式」に対する反応率は女子の方が高い。

理系と文系の差は各学年で見られる、高二において理系と文系の有意な差のある項目が最も多く、六項目のうち四項目について、類型別による差がでている。高二の調査段階では、生徒達には理系文系の区別がなく同質と考えられる。だから、反応率の高いものが高三になり理系へ、低いものが文系へ進んだことが表1と表8からわかる。

交互作用のあるのは、52年高三の「最大最小」に関する項目のみである。表1-1より、女子の理文の差が大きい。

そこで、反応数について χ^2 テストをすると $\chi^2(1) = 4.69$ $P < 0.05$ で有意な差がある。しかし、他の因子についてはすべて有意な差はなかった。

同じ生徒達が高二から高三に進級するにしたがって、反応数の変化が問題になる。各項目にわたり、理系の男子、理系の女子、文系の男子、文系の女子、学年全体のそれぞれについて、高二から高三に変化することにより反応の分布がどう変化するかを χ^2 テストで検定する。

表 - 4

「方程式」	○	×	計
52年高二	115	7	122
53年高三	97	16	113
計	212	23	235

$$\chi^2(1) = 4.71 \quad 0.05 < P < 0.025$$

5%水準で有意

「増加減少」	○	×	計
52年高二	85	37	122
53年高三	55	58	113
計	140	95	235

$$\chi^2(1) = 10.7 \quad P < 0.005$$

1%水準で有意

「増加減少」	○	×	計
52年高二文系女子	28	18	46
53年高三文系女子	17	27	44
計	45	45	90

$$\chi^2(1) = 4.45 \quad 0.05 < P < 0.025$$

5%水準で有意

表1から、学年進行にともなって反応率が各項目にわたって低下していることがわかるが有意な差があるものは表4に示されている。「増加減少」の学年進行にともない反応数が少なくなることはすでに述べた。文系女子について、「増加減少」の反応数の低下が有意になるのは、文系女子は大学の入試に数学を必要としない者が高三の三学期末には多数を占めるようになり数学に対する積極的な態度がなくなるからではないだろうか。「方程式」についても上と同じ理由によるのであろう。

3. 順序性について

順序性とは関数のグラフを見てそのグラフからどのような順序で先の六個の概念をあげるかということである。

表 - 5

		52年 高三						52年 高二						53年 高三					
項目	順位	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
	理系男子 103	定義域	28	2	2	1	0	0	20	6	2	1	1	0	15	3	4	0	1
方程式		5	16	9	4	2	0	11	10	4	6	2	0	6	13	5	4	1	0
不等式		0	0	1	4	0	0	0	1	2	0	1	2	1	1	0	3	0	1
最大最小		0	6	6	3	4	0	0	2	5	7	9	0	1	1	4	8	1	1
増減		1	2	4	9	8	0	1	8	5	7	4	0	3	3	5	2	5	0
極大極小		3	11	11	6	0	0	2	7	14	6	1	0	6	10	9	3	0	1
理系女子 46	定義域	16	1	1	0	0	0	8	2	2	0	0	0	4	4	1	0	0	0
	方程式	3	11	5	1	0	0	4	5	2	2	0	1	4	2	2	1	1	1
	不等式	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0	1	0
	最大最小	1	1	3	6	2	1	0	0	2	5	2	0	0	1	2	1	1	0
	増減	0	1	3	5	2	0	0	3	3	2	3	0	0	2	1	2	0	0
	極大極小	1	7	5	4	2	0	3	3	3	3	2	0	3	2	4	1	0	0
文系男子 76	定義域	10	1	0	0	0	0	15	1	0	0	0	0	12	2	1	0	0	0
	方程式	5	9	4	1	0	0	10	7	2	4	2	0	6	5	5	3	0	0
	不等式	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	2	0	2	1	0
	最大最小	1	6	4	1	1	0	0	4	5	6	0	0	0	1	6	1	1	0
	増減	0	0	4	4	1	0	2	7	5	4	3	0	4	4	3	3	1	0
	極大極小	6	3	3	3	1	0	1	8	10	1	0	0	3	11	4	1	0	0
文系女子 130	定義域	12	3	2	0	0	0	25	6	5	1	0	0	19	7	1	1	1	0
	方程式	15	8	5	4	0	0	11	8	14	7	1	2	15	9	10	4	0	0
	不等式	0	0	1	2	0	0	2	2	4	2	3	1	0	0	1	3	3	0
	最大最小	3	3	3	5	0	0	1	5	9	8	5	1	5	8	10	5	2	0
	増減	3	2	4	0	1	0	1	10	3	7	7	0	2	5	2	7	1	0
	極大極小	2	17	4	2	1	0	5	13	6	8	0	1	3	11	10	4	1	0

順序性について問題になるのは、最初に挙げる性質が論理性を持っているものを挙げるか、視覚

的に目立つ図形的な性質を挙げるかの相異が興味ある問題である。関数についてはまず「定義域」を考えるのが論理的であると考えても良いであろう。視覚的に観ると「山」と「谷」すなわち、「極大」、「極小」が最も目につきやすい図形的な性質と考えても不自然ではないであろう。学年進行にしたがって「定義域」と「極大極小」は有意な差がなかった。そこで三つの学年を一つにして同質の対象と考えて順序性を考察する。

表 6-1

「定義域」を第1位に挙げたもの

	反 応 数			反 応 率	
	男	女		男	女
理 系	68	28	理 系	61.2	60.9
文 系	87	56	文 系	48.7	43.1

表 6-2

表 6-1 の角変換法による分散分析表

変 動 因	平方和SS	df	$x^2 = SS/\sigma\omega^2$	P	$\sigma\omega^2 = 1.078$
A 男 女 差	2.4965	1	0.2825	> 0.05	
B 理 文 差	77.264	1	7.198	< 0.01	
C A、Bの交互作用	2.5025	1	0.2825	> 0.05	

表 6-2 より、「定義域」を第1番目に挙げるものは男女差よりも理系と文系の差があることがわかる。すなわち理系の方が「論理的」と見てよい。

表 7-1

「極大極小」を第1位又は第2位に挙げたもの

	反 応 数			反 応 率	
	男	女		男	女
理 系	39	19	理 系	37.9	41.8
文 系	32	51	文 系	42.1	39.2

表 7-2

表 7-1 の角変換法による分散分析表

変 動 因	平方和SS	df	$x^2 = SS/\sigma\omega^2$	P	$\sigma\omega^2 = 1.078$
A 男 女 差	0.0225	1	0.002	< 0.05	
B 理 文 差	0.1935	1	0.018	< 0.05	
C A、Bの交互作用	8.6102	1	0.887	< 0.05	

表7-2は、「極大極小」を第1、2番目に挙げるものについては男女差、理文差、交互作用のすべてに有意な差がないことを示している。

以上のことから、図形的特徴のある、情緒的な「極大極小」を第一番目に選ぶほどの「非論理性」については有意な差はないが、「論理的」であるのは文系より理系の方であるといえる。

次に「論理性」を表すものとして、「定義域」を挙げてから「最大最小」を挙げるものとその逆のもの、「増加減少」を挙げてから「極大極小」を挙げるものとその逆のものについて考えてみよう。

次表は、たての順位は最初概念、たとえば「定義域」（「増減」）をあげた順位、横の順位はその概念につづく概念、たとえば「最大最小」（「極大極小」）をあげた順位である。

次の表8、表9は、論理性のある「定義域」と「最大最小」を両方ともあげたもの、「増加減少」と「極大値、極小値」の両方を挙げたものを、順位によってまとめたものである。

表 8
定義域⇒最大値、最小値

	52年 高三	52年 高二	53年 高三																																																																																																																																																			
理系男子	<table border="1"> <tr><th>▽</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr> <tr><th>1</th><td></td><td></td><td>6</td><td>4</td><td></td><td>4</td></tr> <tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><th>4</th><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	▽	1	2	3	4	5	6	1			6	4		4	2				1	1		3					2		4			1				5							6							<table border="1"> <tr><th>▽</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr> <tr><th>1</th><td></td><td></td><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr> <tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr> <tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	▽	1	2	3	4	5	6	1			2	3	2	5	2				2	2	2	3					1	1	4						1	5				1			6							<table border="1"> <tr><th>▽</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr> <tr><th>1</th><td></td><td></td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td></tr> <tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>3</td></tr> <tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr> </table>	▽	1	2	3	4	5	6	1			1	3	2	1	2					2		3						3	4							5							6						1
▽	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																																
1			6	4		4																																																																																																																																																
2				1	1																																																																																																																																																	
3					2																																																																																																																																																	
4			1																																																																																																																																																			
5																																																																																																																																																						
6																																																																																																																																																						
▽	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																																
1			2	3	2	5																																																																																																																																																
2				2	2	2																																																																																																																																																
3					1	1																																																																																																																																																
4						1																																																																																																																																																
5				1																																																																																																																																																		
6																																																																																																																																																						
▽	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																																
1			1	3	2	1																																																																																																																																																
2					2																																																																																																																																																	
3						3																																																																																																																																																
4																																																																																																																																																						
5																																																																																																																																																						
6						1																																																																																																																																																
理系女子	<table border="1"> <tr><th>▽</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr> <tr><th>1</th><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>2</td></tr> <tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr> <tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	▽	1	2	3	4	5	6	1			1	2	5	2	2				1			3					1		4							5							6							<table border="1"> <tr><th>▽</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr> <tr><th>1</th><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr> <tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	▽	1	2	3	4	5	6	1				1	2	2	2					1	1	3						2	4							5							6							<table border="1"> <tr><th>▽</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr> <tr><th>1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr> <tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	▽	1	2	3	4	5	6	1					1		2				2			3						1	4							5							6						
▽	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																																
1			1	2	5	2																																																																																																																																																
2				1																																																																																																																																																		
3					1																																																																																																																																																	
4																																																																																																																																																						
5																																																																																																																																																						
6																																																																																																																																																						
▽	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																																
1				1	2	2																																																																																																																																																
2					1	1																																																																																																																																																
3						2																																																																																																																																																
4																																																																																																																																																						
5																																																																																																																																																						
6																																																																																																																																																						
▽	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																																
1					1																																																																																																																																																	
2				2																																																																																																																																																		
3						1																																																																																																																																																
4																																																																																																																																																						
5																																																																																																																																																						
6																																																																																																																																																						
文系男子	<table border="1"> <tr><th>▽</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr> <tr><th>1</th><td></td><td></td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	▽	1	2	3	4	5	6	1			2	2	1	1	2							3							4							5							6							<table border="1"> <tr><th>▽</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr> <tr><th>1</th><td></td><td></td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td></td></tr> <tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	▽	1	2	3	4	5	6	1			2	3	5		2					1		3							4							5							6							<table border="1"> <tr><th>▽</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr> <tr><th>1</th><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td></td><td>1</td></tr> <tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr> <tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><th>6</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	▽	1	2	3	4	5	6	1			1	2		1	2				1			3							4							5							6						
▽	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																																
1			2	2	1	1																																																																																																																																																
2																																																																																																																																																						
3																																																																																																																																																						
4																																																																																																																																																						
5																																																																																																																																																						
6																																																																																																																																																						
▽	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																																
1			2	3	5																																																																																																																																																	
2					1																																																																																																																																																	
3																																																																																																																																																						
4																																																																																																																																																						
5																																																																																																																																																						
6																																																																																																																																																						
▽	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																																
1			1	2		1																																																																																																																																																
2				1																																																																																																																																																		
3																																																																																																																																																						
4																																																																																																																																																						
5																																																																																																																																																						
6																																																																																																																																																						

52年 高三

↖	1	2	3	4	5	6
1			2	2		
2	1					
3				2		
4						
5						
6						

52年 高二

↖	1	2	3	4	5	6
1		3	5	4	5	1
2			4			
3				4		
4		1				
5						
6						

53年 高三

↖	1	2	3	4	5	6
1		5	1	3	2	
2			5	1		
3				1		
4			1			
5	1					
6						

文系女子

表 9
增加、減少 ⇒ 極大値、極小値

52年 高三

↖	1	2	3	4	5	6
1						
2	1			1		
3		1		2		
4		3	5			
5		3	2	2		
6						

52年 高二

↖	1	2	3	4	5	6
1			1			
2			6	2		
3		2		2		
4		3	2		1	
5	2		1	1		
6						

53年 高三

↖	1	2	3	4	5	6
1		2				
2	1		2			
3		3		2		
4	1		1			
5		1	3			1
6						

理系男子

52年 高三

↖	1	2	3	4	5	6
1						
2	1					
3		1		1		
4		3			2	
5			2			
6						

52年 高二

↖	1	2	3	4	5	6
1						
2			1		2	
3				3		
4	1		1			
5	1	2				
6						

53年 高三

↖	1	2	3	4	5	6
1						
2			1	1		
3						
4			1			
5						
6						

理系女子

52年 高三

↖	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3		1		3		
4	1		2		1	
5			1			
6						

52年 高二

↖	1	2	3	4	5	6
1			1			
2			1	1		
3		4				
4			4			
5			3			
6						

53年 高三

↖	1	2	3	4	5	6
1		2	1			
2	2		1			
3		2				
4			2			
5				1		
6						

文系男子

	52年 高三	52年 高二	53年 高三
--	--------	--------	--------

文 系 女 子	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>□</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>2</td><td> </td><td> </td><td>1</td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>3</td><td> </td><td>8</td><td> </td><td> </td><td>1</td><td> </td></tr> <tr><td>4</td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>5</td><td> </td><td> </td><td>1</td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>6</td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> </table>	□	1	2	3	4	5	6	1							2			1				3		8			1		4							5			1				6							<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>□</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td> </td><td>1</td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>2</td><td> </td><td> </td><td>2</td><td>4</td><td> </td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td> </td><td> </td><td> </td><td>1</td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>6</td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> </table>	□	1	2	3	4	5	6	1		1					2			2	4		1	3				1			4	1	2	2				5	2	2					6							<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>□</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>2</td><td> </td><td> </td><td> </td><td>2</td><td>1</td><td> </td></tr> <tr><td>3</td><td> </td><td> </td><td> </td><td>1</td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>5</td><td> </td><td> </td><td> </td><td>1</td><td> </td><td> </td></tr> <tr><td>6</td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr> </table>	□	1	2	3	4	5	6	1							2				2	1		3				1			4	1	2	4				5				1			6						
	□	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																															
	1																																																																																																																																																					
	2			1																																																																																																																																																		
	3		8			1																																																																																																																																																
	4																																																																																																																																																					
	5			1																																																																																																																																																		
6																																																																																																																																																						
□	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																																
1		1																																																																																																																																																				
2			2	4		1																																																																																																																																																
3				1																																																																																																																																																		
4	1	2	2																																																																																																																																																			
5	2	2																																																																																																																																																				
6																																																																																																																																																						
□	1	2	3	4	5	6																																																																																																																																																
1																																																																																																																																																						
2				2	1																																																																																																																																																	
3				1																																																																																																																																																		
4	1	2	4																																																																																																																																																			
5				1																																																																																																																																																		
6																																																																																																																																																						

「定義域」と「最大値、最小値」の関係

ほとんどの生徒が定義域を第一番目にあげているから必然的に「最大最小」に対する反応が後になり、見せかけの「論理性」がある、そこで「定義域」をあげたあとすぐに「最大最小」をあげるものと、他の性質をあげた後に「最大最小」をあげるものに差があるかどうかを調べる。

表 10-1

「定義域」の直後に「最大値、最小値」をあげるもの

	反 応 数		反 応 率																			
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>男</td><td>女</td></tr> <tr><td>理 系</td><td>20</td><td>8</td></tr> <tr><td>文 系</td><td>6</td><td>24</td></tr> </table>		男	女	理 系	20	8	文 系	6	24		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>男</td><td>女</td></tr> <tr><td>理 系</td><td>19.4</td><td>17.4</td></tr> <tr><td>文 系</td><td>7.9</td><td>18.5</td></tr> </table>		男	女	理 系	19.4	17.4	文 系	7.9	18.5	
	男	女																				
理 系	20	8																				
文 系	6	24																				
	男	女																				
理 系	19.4	17.4																				
文 系	7.9	18.5																				

表 10-2

表10-1の角変換法による分散分析表

変 動 因	平方和SS	df	$\chi^2 = SS/\sigma\omega^2$	P
A 男 女 差	14.32	1	1.34	> 0.05
B 理 文 差	20.39	1	1.90	> 0.05
C A、Bの交互作用	27.72	1	2.58	> 0.05

$$\sigma\omega^2 = 10.73$$

表 10-3

「定義域」をあげその他の項目のあとで「最大値、最小値」をあげる

	反 応 数		反 応 率																			
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>男</td><td>女</td></tr> <tr><td>理 系</td><td>32</td><td>18</td></tr> <tr><td>文 系</td><td>16</td><td>26</td></tr> </table>		男	女	理 系	32	18	文 系	16	26		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>男</td><td>女</td></tr> <tr><td>理 系</td><td>31</td><td>39</td></tr> <tr><td>文 系</td><td>21.1</td><td>20</td></tr> </table>		男	女	理 系	31	39	文 系	21.1	20	
	男	女																				
理 系	32	18																				
文 系	16	26																				
	男	女																				
理 系	31	39																				
文 系	21.1	20																				

表 10-4

表10-8の角変換法による分散分析表

変 動 因	平方和SS	df	$x^2=SS/\sigma\omega^2$	P
A 男 女 差	4.2026	1	0.892	> 0.05
B 理 文 差	80.8625	1	7.54	< 0.01
C A、Bの交互作用	7.6728	1	0.715	> 0.05

$$\sigma\omega^2 = 1.078$$

表10-2により「定義域ときたら最大最小」という紋切型の反応について調べたが、男女差、理文差ともに有意な差はない。

表10-8によれば「定義域」のあと他の項目をあげてから「最大最小」をあげるものには文理の間に有意な差がある。男女差はない。

以上のことから、紋切型の反応には有意差はないが、論理性のある「定義域」と「最大値、最小値」を同時にあげてしかも「定義域」にひきつづき「最大値、最小値」をあげる反応には、男女差はないが、文系と理系では理系の方が「論理的」であるといえる。

「増加減少」と「極大値、極小値」の関係

表9からみれば「増減」と「極大極小」の順序関係はかなり乱れていることがわかる。

「増減」のすぐ後に「極大極小」をあげるものと、「極大極小」の直後に「増減」をあげるものの分布を調べてみよう。

表 11-1

増 減 \Rightarrow 極 値

	反 応 数			反 応 率	
	男	女		男	女
理 系	18	8	理 系	17.5	17.4
文 系	8	6	文 系	10.5	4.6

表 11-2

表11-1の角変換法による分散分析表

変 動 因	平方和SS	df	$x^2=SS/\sigma\omega^2$	P
A 男 女 差	11.0889	1	10.33	> 0.05
B 理 文 差	88.7225	1	7.80	< 0.01
C A、Bの交互作用	11.0889	1	10.33	> 0.05

$$\sigma\omega^2 = 1.078$$

表 11-3
極 値 \implies 増 減

	反 応 数			反 応 率	
	男	女		男	女
理 系	19	4	理 系	184	87
文 系	18	13	文 系	237	10

表 11-4
表11-3の角変換法による分散分析表

変 動 因	平方和SS	df	$x^2 = SS/\sigma\omega^2$	P
A 男 女 差	91.107	1	8.49	< 0.005
B 理 文 差	6.275	1	0.585	> 0.05
C A、Bの交互作用	1.0303	1	0.096	> 0.05

$$\sigma\omega^2 = 10.78$$

論理的に関係が深いと考えられる「増減」から「極値」をすぐにあげているものは表11-2から有意な男女差はない。しかし、理系と文系の差は有意である。この場合も理系の方が文系より論理的であると考えられる。

反対に、「極値」から「増減」をひきつづきあげるものは、図形的に目に入りやすい「山」から「谷」、「谷」から「山」とたどることにより、「極値」から「増減」に反応しているのであろう。いうならば、非論理的と言えないまでもかなり情緒的な反応と言えるであろう。この反応の分析は表11-4であるが文系と理系には有意な差はなく、男女差に有意な差がある。しかも、男性の方が非論理性を示している。文系男子の反応率が高いことによるのだろうか。

数学教育の立場から考えてみよう。極大、極小という概念は微分法と直接関係なく、局所的な最大、最小にすぎない。その判定条件として導関数の符号の変化を調べるのであり、増加、減少という概念が先行しているべきである。しかし、生徒達は極大、極小といえは「 $f'(x) = 0$ を解けばよい」と認識しており増加、減少との関連を明確に理解していないことは、我々の分析がこのことを示しているであろう。極大、極小について教授する場合、その定義を明確に指導する必要がある。

〔 結 論 〕

関数のグラフからその性質を読みとるのに

- (1) 関数値の符号の変化が最も読みとりにくい。したがって、この性質に関するものを教授する際は特に留意して教える必要がある。
- (2) 有意な男女差はない。
- (3) 理系の方が文系よりもよく読みとっている。

(4) 女性が特に非論理的であるとは言えないのではないか。
 極大値、極小値の指導に当っては増加、減少との関係を強調する必要がある。

最後になりましたが奈良教育大学数学教室坂口泉一教授、心理学教室杉村健教授に厚く感謝の意を表します。

参考文献と注

- (1) 「標準学力テストを実施して」
 奈良女子大学文学部附属中・高等学校研究紀要第19集 1977 P.59
- (2) J. ピアジェ 他著「心像の発達心理学」 国土社 P.19
- (3) 「現代教科教育学大系数学と思考」 第一法規 P.196
- (4) ストリヤール著「数学教育学」 明治図書 P.83
- (5) 同 上(3) P.219
- (6) 同 上(4) P.83
- (7) 菊池乙夫「中学校関数をめぐる諸問題」 雑誌「数学教室」№67 1960年4月
- (8) 「関数のグラフの一指導について」
 奈良女子大学文学部附属中・高等学校研究紀要第20集 1978 P.16
- (9) 周辺度数が等しくないので、念のため χ^2 検定により以下表6-2、表7-2、表10-3、表11-2、表11-4を検定しておく。

表 6-2

	理	文	
○	91	98	184
×	58	118	171
	149	206	355

$\chi^2(1) = 8.786 \quad P < 0.005$

	男	女	
○	100	84	184
×	79	92	171
	179	176	355

$\chi^2(1) = 2.85 \quad P > 0.05$

表 7-2

	理	文	
○	58	83	141
×	91	128	214
	149	206	355

$\chi^2(1) = 0.067 \quad P > 0.05$

	男	女	
○	71	70	141
×	108	106	214
	179	176	355

$\chi^2(1) = 0.0004 \quad P > 0.05$

表 10-3

	理	文	
○	50	42	92
×	99	164	263
	149	206	355

$$\chi^2(1) = 7.81 \quad P < 0.01$$

	男	女	
○	48	44	92
×	131	132	263
	179	176	355

$$\chi^2(1) = 0.152 \quad P > 0.05$$

表 11-2

	理	文	
○	26	14	40
×	123	192	315
	149	206	355

$$\chi^2(1) = 98.15 \quad P < 0.001$$

	男	女	
○	26	14	40
×	153	162	315
	179	176	355

$$\chi^2(1) = 383.2 \quad P > 0.05$$

表 11-4

	理	文	
○	23	31	54
×	126	175	301
	149	206	355

$$\chi^2(1) = 0.0099 \quad P > 0.05$$

	男	女	
○	37	17	54
×	142	159	301
	179	176	355

$$\chi^2(1) = 83.42 \quad P < 0.0005$$

○……反応あり

×……反応なし