逆関数の指導について

奈良女子大学文学部附属
中・高等学校研究紀要第23集
1982年6月

逆関数の指導について

数学科　松　本　博　史

は　じ　め　に

今回の学習指導要領の改訂に伴い、中学校数学の内容から高校へ移行した内容の一つに、逆関数がある。ある関係 R に対して、逆の関係 R^{-1} を考えることは数学においては、ごく自然な発想であり、重要なことである。逆関数については、ある条件を付加して R^{-1} が存在する方向（$y=x^2$ から $x \geqq 0$ のとき、$y=\sqrt{x}$，$y=\sin x$ から $y=\mathrm{Sin}^{-1}x$）と全く新しい R^{-1} を創る方向（$y=2^x$ から $y=\log_2 x$）を考えることにより、数学を豊かに奥深いものとして創造していく。しかし、一般的には、逆の関係を生徒に理解させることは難しい。ある関数を教えたからといって、その逆関数を教えるというのは全く別問題である。後で示すように、逆関数の理解は、中学生のみならず、高校生にとっても十分理解されている教材とはいえない。中学から高校へ指導を遅くらせれば、事足りる内容でもない。そこで、逆関数の指導方法と問題点を明らかにするのがこの小論の目的である。

逆 関 数 に つ い て

命題A　f を集合 X（$\neq \phi$）から集合 Y への関数とするときつぎの条件(1)－(4)は同値である。

(1)　$x_1, x_2 \in X$，$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$

(2)　$x_1, x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(3)　f の値域 $f(X)$ から X への関数 g が存在して　$g \circ f = i_X$　をみたす。

(4)　f の値域 $f(X)$ から X の上への関数 h が存在して　$f \circ h = i_{f(X)}$ をみたす。

（ただし、$g \circ f$ は f と g の合成関数、i_X は X における恒等関数を表す）

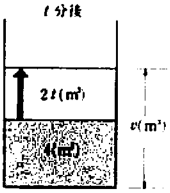
関数 f が上の命題Aの条件(1)－(4)をみたすとき、f は逆関数をもつといい、g 又は h を f の逆関数といい、f^{-1} と表す。（BASIC数学177号　P.4参照　現代数学社）

中・高における逆関数の導入は、命題Aの(1)（又は(2)）から(3)（又は(4)）を導びく方向で定義される。すなわち $f(X)$ の任意の要素 y に対して、$f(x)=y$ をみたす X の要素 x が一意に存在する。そこで、y に x を対応させる関数を g とする。これは $f(X)$ から X の上への関数である、という具合である。これを、中・高校の教科書では、つぎのように表現され、導入される。

教科書B　中学校教科書「新編　新しい数学３」　東京書籍　昭和55年２月10日発行

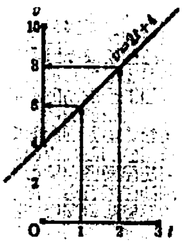
§2　逆関数

10 m³ まではいるタンクに 4 m³ だけ水がはいっている。このタンクに，さらに毎分 2 m³ の割合で 3 分間注水して満水にした。



注水をはじめてから t 分後のタンクの中の水の量を v m³ とすれば，v は t の関数であり，次のように表される。

$$v = f(t) = 2t + 4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$



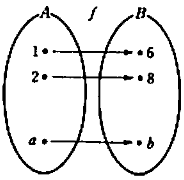
ただし，(1)で表される関数 f の定義域，値域はそれぞれ次の集合 A，B である。

$$A = \{t \mid 0 \leqq t \leqq 3\}$$
$$B = \{v \mid 4 \leqq v \leqq 10\}$$

(例 1)　関数 (1) において，

$$f(1) = 2 \times 1 + 4 = 6$$
$$f(2) = 2 \times 2 + 4 = 8$$

したがって，f によって，A の要素 1 には B の要素 6 が対応し，A の要素 2 には B の要素 8 が対応している。



[illegible]　関数 (1) において，A の要素 1.5，2.5 に対応する B の要素をそれぞれ求めよ。

(1)によれば，タンクの水の量 v が時間 t によって表されている。逆に，タンクの水の量 v をきめて，その状態になるまでの時間 t を求めてみよう。

❶　(1)の式を用いて，タンクの水の量が 5 m³ となるまでの時間を求めよ。また，前ページのグラフから読みとれ。

上の結果からわかるように，(1)における v の値として集合 B に属する数を 1 つきめると，それに対応する t の値がきまる。すなわち，t は v の関数になっている。この関数を

$$t = g(v)$$

と表すことにすれば，関数 g の定義域は B で，値域は A である。

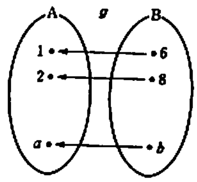
関数 g が v のどのような式で表されるかを知りたいときには，次のようにして (1) を t について解けばよい。

$$v = 2t + 4$$
$$2t = v - 4$$
$$t = \frac{v-4}{2}$$

したがって，

$$t = g(v) = \frac{1}{2}v - 2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ここで，もとの関数 f といま求めた関数 g との関係を調べてみよう。



[illegible]　関数 (2) において，B の要素 6，8 にはそれぞれ A の要素 1，2 が対応していることを確かめよ。
また，$g(4)$，$g(10)$ を求めよ。

f は A から B への関数であり，g は B から A への関数である。

そして，$a \in A$，$b \in B$ とするとき，

f によって

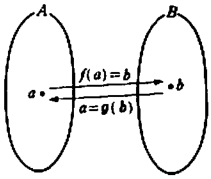
$$a \longrightarrow b$$

のように対応すれば，

g によって

$$b \longrightarrow a$$

のように対応する。



すなわち，関数 g による対応は，関数 f による対応の逆の対応になっている。

このようなとき一般に，g を f の逆関数という。

旧課程の生徒達は、教科書Bのような学習の後、「数学Ｉ」でさらに逆関数について学んだ。しかし、新課程では、「数学Ｉ」で、次の教科書Cのような指導を、この部分でしか学習しない。旧課程のような、指数・対数関数での逆関数の指導は「基礎解析」へ移行し、逆写像についての部分は削除された。だから、高校生の大多数の者は、逆関数は教科書Cのような学習のみとなる。

教科書C　高等学校教科書「数学 I」　東京書籍　昭和57年2月10日発行

❸ 逆関数

例1 関数 $f(x)=2x+3$ の定義域，値域はともに実数全体の集合であって，b を任意の実数とすれば，

$$b=f(a) \quad すなわち \quad b=2a+3$$

となる実数 a が，$a=\frac{1}{2}b-\frac{3}{2}$ として，ただ1つ定められる。

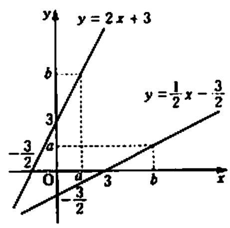
したがって

$$g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

とおけば，

$$b=f(a) \iff a=g(b)$$

となる。



すなわち，関数 $f(x)=2x+3$ と関数 $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ においては，変数 x の値とそれに対応する関数の値との対応の関係がちょうど逆になっている。

例2 集合 $A=\{x \mid x \geqq 0\}$ を定義域とする関数 $f(x)=x^2+1$ の値域は $B=\{y \mid y \geqq 1\}$ であって，b を B の任意の要素とすれば，

$$b=f(a)$$

すなわち $\quad b=a^2+1$

となる A の要素 a が，

$$a=\sqrt{b-1}$$

として，ただ1つ定められる。

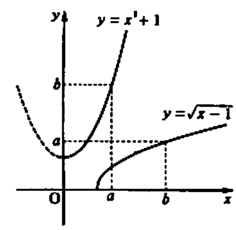
したがって

$$g(x)=\sqrt{x-1} \quad (x \geqq 1)$$

とおけば，A の要素 a と B の要素 b に対して

$$b=f(a) \iff a=g(b)$$

となる。



一般に，関数 $y=f(x)$ の定義域が A，値域が B であって，B のおのおのの要素 b に対し，$b=f(a)$ となる A の要素 a がただ1つだけ定まるならば，次の性質 (1)，(2) をもつ関数 $y=g(x)$ が存在する。

(1) $y=g(x)$ の定義域は B，値域は A である。

(2) A の要素 a と B の要素 b に対して

$$b=f(a) \iff a=g(b)$$

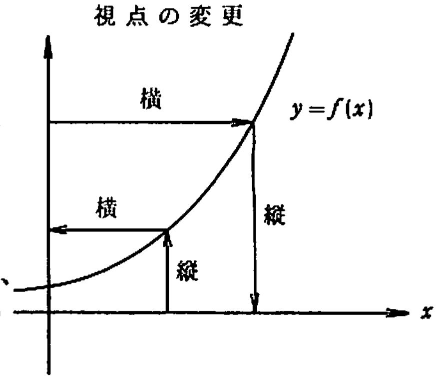
が成り立つ。

この関数 $y=g(x)$ を関数 $y=f(x)$ の **逆関数** という。

これらの中・高校の教科書を一読すればわかるように、具体例、グラフ、対応図を用いて説明していることで、表面的には抽象的な導入が避けられている。しかし、本質的には、命題Aの(1)から(3)の証明と同一である。すなわち、方程式 $y=f(x)$ を x について解くということが中心になっている。この論文の後半で示すように、旧課程の生徒達の逆関数についての正しい認識は、極めて浅く、概念は定着していないと考えられる。中・高とくり返えし学習したにも拘わらずである。従って、新課程の「数学 I」における逆関数の指導に関しては、十分留意する必要がある。教科書Cのような展開の以前に、もっと感覚運動的、身体的な経験が必要である。

逆関数の本質とは何であろうか。感覚運動的・身体的な経験とはどのようなものが考えられるであろうか。たとえば、単調増加なグラフについて考えてみると、逆関数のグラフとは、もとのグラフを y 軸から見直したものである。すなわち、y 軸上を独立変数が動くというように、今まで縦てから横を見ていたのを、横から縦てを見るという､「立場、視点の変更」である。ある事象の変化を観察して、その事象の変化の様子を関数で表現するとき、逆関数というのは、他の事象を表現した関数ではなくて、同一の事象を、事象の変数を変更して表現した関数と考えられる。すなわち、一つの事象を立場を変えて、二通りの視点で観察し、それを関数表現したものが、関数であり、逆関数と言われ

視点の変更



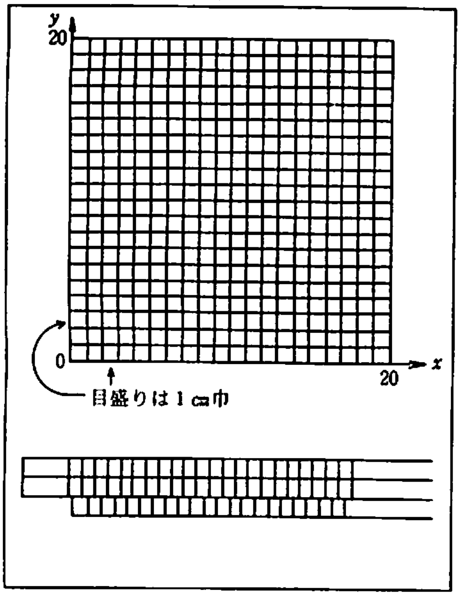
るものであろう。

従来から、教科書Cにみられるように、逆関数の求め方のような指導に重点がおかれがちである。重要なことは、逆関数の存在、もとの関数と逆関数との関係を理解させることである。このような立場に立って、逆関数を導入したのが、次に述べる実験である。

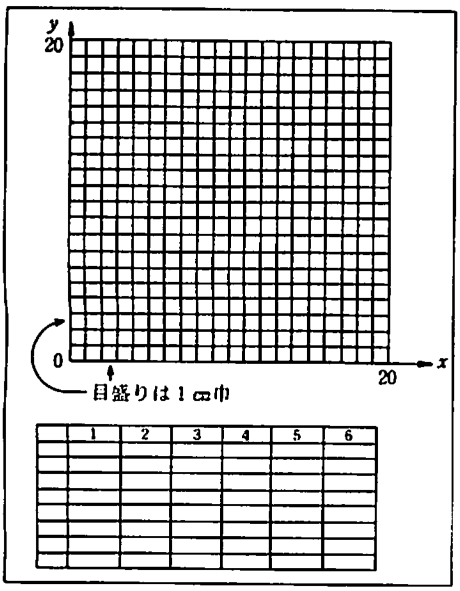
実　　　　験

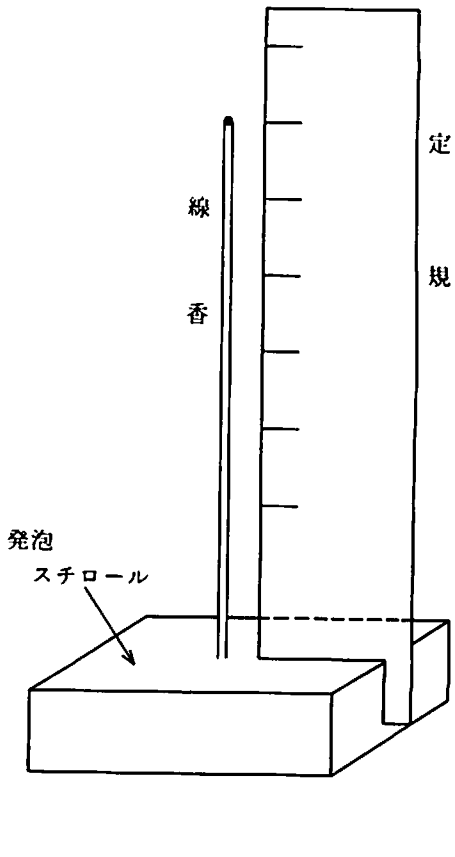
＜準備するもの＞　線香、マッチ、時計、発泡スチロールの直方体（5㎝×5㎝×2㎝）定規、方眼と変化表を印刷したプリント①、②を生徒に一枚づつと各班に提出用プリント②を一枚。

プリント①



プリント②





＜実験の方法＞　①　班を２つに分け、２つのグループを作る。１つの班で１本の線香を燃やす。燃える様子を２通りの方法でグループ毎に別々に観察させる。（「１本の線香の燃える様子を調べたい。どんな調べ方があるだろうか」というような質問で生徒に考えさせる。）一方のグループは、１分毎の線香の長さ（時間 → せんこうの長さ）、他のグループは、せんこうの長さの１cm毎燃えるまでの時間を計る（せんこうの長さ → 時間）。すなわち、１本の燃える線香の状態の独立変数と従属変数をグループ毎で互いに異なるように観察する。

②　４人のうち２人はせんこうの長さと時間を計る。他の２人に、記録係で、時間、長さをそれぞれ変化表に記入させる。

③　３分間焼してみて、10cm燃えるまでの時間を予想させる。（平均変化率に気付かせる）

④　10cm焼した後、プリント①、②を完成させる。

⑤　グループで一次関数の式とグラフを求め、定義域、値域を求めさせる。グループ間で情報を交換して、プリント②に２本の直線のグラフを記入させる。班で一枚提出用のプリント②を提出させる。（その一部がプリント③である）

〔注意〕プリント①、②の方眼紙の目盛りは、x軸、y軸ともに目盛り巾を１cmにとり、１目盛りの単位を、焼えた長さが１cm、時間が１分であるように取る。これは「時間 → 長さ」と「長さ → 時間」の関係を１枚のプリント②に記入して、$y=x$についての対称性を調べさせるためである。

＜授業の展開＞　①　上の実験と一次関数を求めるところまでで約50分終了。

②　ある班の関数を例に取り上げて授業を進める。私の場合は、２班の関数、時間 → 長さ　$y=-0.4x+10$、長さ → 時間　$y=-2.5x+25$を利用して授業を進めた。このように、正確な関数が得られる。

③　線香の長さが10cmになるのは $\boxed{}$ 分経過したとき　（６分）

６分経過したときの線香の長さは $\boxed{}$ cmになる　（10cm）

このような具体的な質問をいくつか練習した後、自分達の関数について班毎に同様の問題を作らせる。

(i)　線香の長さが b cmになるのは、a 分経過したとき。

(ii)　a 分経過したときの線香の長さは、b cmになる。

(i)と(ii)の関係を考えることにより、実は同じ式であることを発見させる。時間 → 長さの式で(i)の関係を表し a について解くと(ii)が得られ、長さ → 時間の式で(ii)の関係を式に表し b について解くと(i)が得られることに気付かせる。ここが逆関数の授業の中心であり、逆関数の意味を考えさせるところである。(i)、(ii)の相互関係を調べるなかで逆関数の求め方も説明できる。

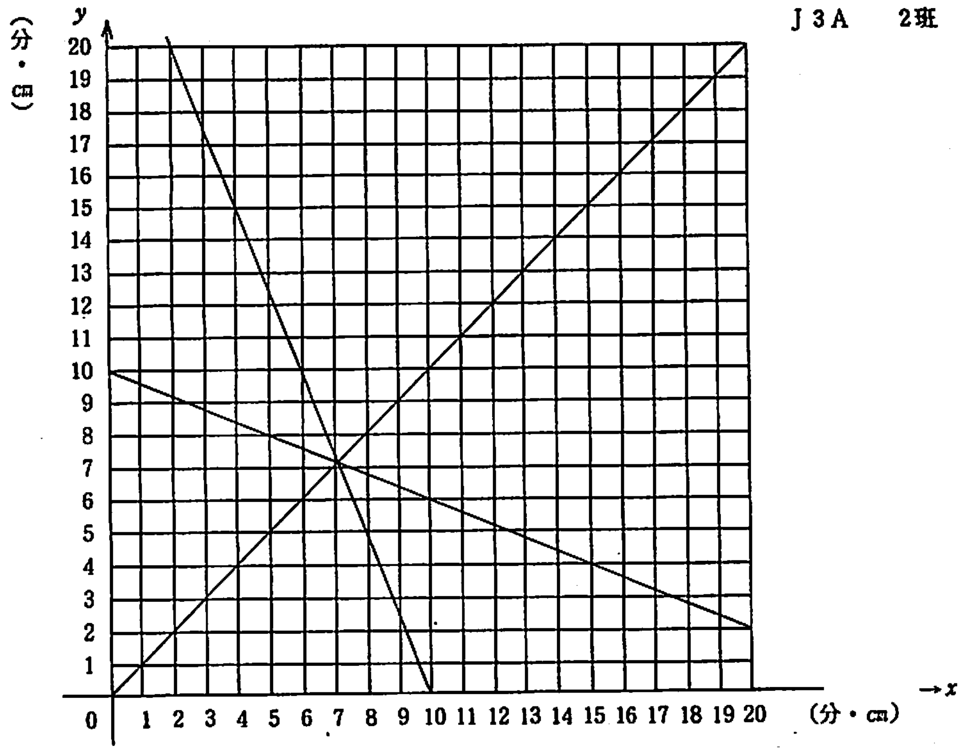
この動機づけのために、ある班の一方の関数を聞いて、教師が他方の（逆）関数を当ててやると、生徒達は「不思議やなあー」という反応を示す。

④　次にプリント②のグラフを $y=x$ で折り重ねるとぴったりと重なる。このことを見せてから関数とその逆関数は $y=x$ に関して対称であることを説明する。③と④で50分

以上が逆関数の導入であり、この後は、教科書に入り、内容を適当に取捨選択する。なお、この授業は昭和55年12月に中学三年生を対象に実施したものである。この授業を受けた生徒のレポートと感想文をつぎに掲げておく。（線香を利用した一次関数の指導は「中学数学の授業３関数」あゆみ出版にくわしい）

プリント③

J 3 A　　2班



班	1	2	3	4	5	6
予　想		23 分				
修　正		25 分				
時間→長さ	$y=-0.37x+10$	$y=-0.4x+10$	$y=-0.37x+10$	$y=-0.39x+10$	$y=-0.34x+10$	$y=-0.4x+10$
定義域 値域	$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 27\}$ $\{y \mid 0 \leqq y \leqq 10\}$	$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 25\}$ $\{y \mid 0 \leqq y \leqq 10\}$	$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 27\}$ $\{y \mid 0 \leqq y \leqq 10\}$	$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 26\}$ $\{y \mid 0 \leqq y \leqq 10\}$	$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 23\}$ $\{y \mid 0 \leqq y \leqq 10\}$	$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 25\}$ $\{y \mid 0 \leqq y \leqq 10\}$
長さ→時間	$y=-2.7x+27$	$y=-2.5x+25$	$y=-2.8x+28$	$y=-2.6x+26$	$y=-2.3x+23$	$y=-2.5x+25$
値域 定義域	$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 10\}$ $\{y \mid 0 \leqq y \leqq 27\}$	$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 10\}$ $\{y \mid 0 \leqq y \leqq 25\}$	$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 10\}$ $\{y \mid 0 \leqq y \leqq 10\}$	$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 10\}$ $\{y \mid 0 \leqq y \leqq 26\}$	$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 10\}$ $\{y \mid 0 \leqq y \leqq 23\}$	$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 10\}$ $\{y \mid 0 \leqq y \leqq 25\}$
式から						
実験から		1.3 cm				

〔生徒のレポート〕

逆関数　中3A(35) 長野麻子

〔目的〕逆関数の意味を知る。

〔方法〕① 線香を3分間燃やしてみて、10cm 燃えるまでの時間を予想する。

② 10cmの線香を燃やして、1分ごとに線香の長さを測定し、たてじくに長さ、横じくに時間をとって、グラフにあらわす。

③ ②の実験と共に、線香が1cm 短くなるごとに その時の時間を測り、たてじくに時間、横じくに長さをとって、グラフにあらわす

〔共同実験者〕$\underbrace{\text{金田、松井、堤}}_{③}$、$\underbrace{\text{木村、大竹、雅田}}_{②}$（4班）（長野）

〔予想〕3分燃やした時、1.2cm 燃えた。

10cmの線香が燃えつきるまでの時間x分とする

$3 : 1.2 = x : 10$

$1.2x = 30$

$x = 25$　　25分

〔結果〕グラフのとおり（私は女子だから②の方の実験をした。だから、グラフは4班の②のグラフである）

a. 3分から4分に 0.3cm もえた

⇓

1分間に 0.3cm もえた

b. 5分から10分に 1.7cm もえた

⇓

1分間に 0.34cm もえた

b.の計算

5分 → 7.9cm　10分 → 6.2cm

$\dfrac{6.2-7.9}{10-5} = \dfrac{-1.7}{5} = -0.34$

点のちょうどまん中を通く直線をひいてみると

直線の方程式

$y = -0.39x + 10$

10cmの線香が燃えつきる時間は $y=0$ のときの x

$y=0$ を代入

$0 = -0.39x + 10$

$0.39x = 10$

$x \fallingdotseq 26$　　26分

$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 26\}$

$\{y \mid 0 \leqq y \leqq 10\}$

〔考察〕結果をもとにして、線香が7cm になるまでにかかる時間を求める。

$y = 7$ を代入

$7 = -0.39x + 10$

$0.39x = 3$

$x \fallingdotseq 7.7$　7.7分

このようにして、男子がやった ③ の方のこともわかる。

$y = -0.39x + 10$ を x について解くと

$0.39x = -y + 10$

$x \fallingdotseq -2.6y + 26$

関数のきまりに従って x と y を入れ変えると、
$y=-26x+26$
となり、③の実験の式と一致する。

☆予想より1分遅れた理由
予想をたてるために3分間もやした時は、はじめに勢いよく燃えるのも入れて3分間にしたので変化の割合が大きくなって実際よりも早くに燃えつきてしまうだろうという予想になってしまった。予想より1分遅れたというよりも、予想をたてる時に原因があると思う。

☆点に少しバラつきがみられる理由
これは明らかに私のミスで、時間をしっかりはからなかったからだ。友達に「まだ？」といわれて、「もう過ぎてる!」なんてことが何度もあったので、このような結果になったのだと思う。

[まとめ] ②より $y=-0.39x+10$
③より $y=-26x+26$ } 逆関数

③は②の x を解くことによって求められ、②もまた③の x を解くことによって求められる。

[感想・反省] 4班は とりかかりがおそくて、燃えつきるまで実験することができなかった。それに、だれも線香をもってこなかったことを反省します。でも楽しかった。

実験の感想　中3A 西岡 淳

実験として最初に思ったことは、これは数学に関係したことなのかということでした。線香や、ハッポースチロールの共通性がわかりませんでした　もらったプリントのグラフを見て初めて、数学らしいというか、数学の勉強だと思いました。
それでも、逆関数についてなどということもさっぱりわからなかったです。グラフを2種類かくこともなんのことかわからなかった。また、先生が時間→長さの方の式を聞いただけで長さ→時間の方をあてた（計算した）ことが不思議でした。
このような実験をすることは今までの授業とちがった感じで、よかったでした。

線香の実験をして　感想文

中3A (30) 川村典子

はじめ、ハッポウスチロールと線香なんかで、何をするのか、全くわかりませんでした。　グラフを書き終わってからも そのグラフは何のために書いたのか、何を習うのか？と、不思議に思うだけで、教科書を見て、考えてみようともしませんでした。
授業を聞いて、なーるほど…　やっとわかりました。
逆関数のために 線香を使って実験するって おもしろいし よくわかっていいと思います。
―（ほんとによくわかっているかどうか、疑問ですが…^^;）
ぜんぜん違うグラフに見えて 実は x について解いて xとyを反対にしただけ　というのが いちばん感心(?)したことです。
まあ 一応、わかったのではないかと思っています。
これからも こういうふうに 日和 変わったことをしてもらえると変化があって おもしろい、いーのになあ
と思います。

オシマイ

線香の実験をして　感想文

3A (44) 和田杉

この実験を 何のためにやったのか、私は なかなかわかりませんでした。
最初のうち、
線香は 水平に 燃えるのかナー　なんて ばかなことを 考えていました。
グラフを書いて、授業で聞いて やっと これが 逆関数という ものだとわかりました。
今までは、だいたい、時間は x 軸、線香の長さは y 軸…と 決まった 考え方で 理科などでも グラフを 書いていたけれど x と y とを 逆に 見てみると、見た目は さっきのグラフの傾きなど違うけど、実際には 同じ式で 表わしていて x, y を 交換しただけなのだと わかりました。
1次関数の
線香以外の 各種の グラフについても、y=x を軸にして対称にすれば それが 逆関数だと 知って おもしろいと 思いました。
また、身近な所に '関数' が たくさん あるんだナァ…と思いました。お墓参りなんかに いつも 使っている '線香' だって関数になります。
私たちの生活の中には ありとあらゆる 関数があって、それには逆関数もある場合があって おもしろいと思いました。
今まで、解の公式とか 因数分解とか… 数学なんて 日常生活とはほど遠いものだと思ってたけれど たまには 関係あるんだナー と思いました。

逆関数に関する調査と分析

問題1　中三の生徒が「もうすぐ逆関数というのを習うのだけれども逆関数ってどんなもの」と質問しました。あなたならどう教えますか。
問題2　$y=2x+3$ の逆関数を求めなさい。（求め方も書くこと）
問題3　$y=x^2$ の逆関数を求めなさい。（求め方も書くこと）

〔昭和56年6月調査、対象は本校高校1、2年生〕

	男	女	調査時期までの逆関数についての学習内容
高1	21	23	中三の時に、先の授業を受け、教科書Bで学習、高校では未学習
高2	23	20	中三（教科書Bのみ）高一（逆関数、対数関数、逆写像）

〔問題1について〕

＊は反応において言及された項目

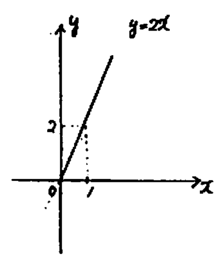
説明に使用した概念						学年	
1対1対応	$y=x$に対称	xについて解く	yとxを入れ替える	具体例で説明	空白	高一 (人)	高二 (人)
*	*	*	*			1	1
*		*	*			0	1
	*	*	*			4	2
*	*					0	3
*			*			0	1
	*	*				0	2
	*		*			8	2
		*	*			8	2
*						0	15
	*					7	3
		*				1	2
			*			5	6
				*		8	1
					*	10	2

〔考察〕　逆関数を説明するのに、一対一対応の概念に言及しているのは、高1では1名、高2では、20名とほぼ半数になる。高1の生徒の少ないのは、この調査時期までに、逆関数に関する学習が中三の内容のみであることによるのであろう。また、教科書Bの展開から考えても、方程式を解き、操作的な指導に終っているから当然の結果であると言える。それに比較して、高2の生徒は、高1で、対数関数の前の逆関数、逆写像について指導を受けている。特に、逆写像では一対一対応が強調されている。このような学習の積み重ねが高2の反応の高さの原因であろう。一応、高2になれば、逆関数と一対一対応が知識としては、強く結びついていると考えられる。しかし、問題3の分析から分かるように、逆関数が身についているとは結論できない。

高1の生徒達は、中学で線香の燃焼による導入の授業を受けているが、一対一対応と逆関数を関連付けるための授業としては、実験による展開は有効とは考えられない。しかし、逆関数を具体的な例によって説明した者は、高1で8名、高2で1名であることを考えれば、実験の導入は成功であったと言えるであろう。逆関数を〝立場・視点の変更〟という観点から説明している回答例をつぎに示そう。

丸上弘晃（高2）

右の図は
$y=2x$ というグラフをあらわしたものです。
このグラフの見方は知っているでしょう。
x が1だけ増すと y が2だけ増すという直線をあらわしていますね。



これは今までならってきたことです。
「逆関数」というのは　この見方をさかさまにしたことで　y が1だけすすむと「x はどのようにかわるでしょうか」ということを考えることです。
この例で言うと　y が1だけ増えると　x は $\frac{1}{2}$ だけふえます。　ですから　$y=\frac{1}{2}x$ が　$y=2x$ の逆関数なのです。

新　求仁子（高1）

線香を燃やしてそれを時間とはかってその長さをはかっていく

そのとき　時間を決めて $\underbrace{\text{その時間}}_{x}$ に $\underbrace{\text{何cm短くなったか}}_{y}$ をはかる　—(1)

一方、$\overset{\text{縮める}}{\wedge}$長さを決めて　$\underbrace{\text{その長さ}}_{x}$ になるまで $\underbrace{\text{何分かかったか}}_{y}$ をはかる　—(2)

すると $\underbrace{\text{前の}\overset{\wedge}{\text{方法の}}}_{(1)}$ x・yの関係と $\underbrace{\text{後の方法}}_{(2)}$ の x・y の関係は　対称である

だから (1)の式を x について解き、それを x、y を入れかえたものが (2)になる

和田　彩（高1）

逆関数とは—。今まで"y"の立場から見ていたのを今度は"x"の立場から見てみることによってでてくる関数…。

早　魔道（高1）

理科なんかで書いたグラフ、例えば体積と圧力との関係を調べたようなグラフで、たて軸に体積、よこ軸に圧力をとったグラフがあるとします。そのグラフのたて軸を圧力にかえよこ軸を体積にかえたグラフを用意します。

一般にグラフはよこ軸にとられた値を基準にしてたて軸の値を決定するといった傾向があるので、先のグラフなら圧力から体積の変化を見るのなら見易いのですが、逆に後のグラフで体積から圧力が見にくいわけです。このために考えられるのが後の方のグラフなのです。2つのグラフの片方から見たもう一方が逆関数のグラフといえるんです。

豊福　誠二（高1）

つまり、視点をかえるのです。ろうそくの一定時間に対する短かくなる割合を見るのと、一定の長さ短かくなるのに対する時間を見るのとを考えると、後者は前者の逆関数というのです。

〔問題2、3について〕

$y=2x+3$ の逆関数を求めよ	高1	高2
① x と y を入れ替える。 ② y について解く	20% (9)	12% (5)
①について解く ② x と y を入れ替える	73% (32)	86% (37)
空　　欄	7% (3)	2% (1)

(　　) 内は実数

$y=x^2$ の逆関数を求めよ	高1	高2
存在しない（正答解）	5% (2)	9% (4)
$y=\pm\sqrt{x}$	70% (31)	54% (23)
$y=\sqrt{x}$	5% (2)	37% (16)
$y=-\sqrt{x}$	2% (1)	0% (0)
$y^2=x$	2% (1)	0% (0)
空　　欄	16% (7)	0% (0)

〔考察〕与えられた一次関数の逆関数を求めることは高1、2の差がなくよく出来る。求め方についても差がない。x について解いた後、x と y を入れ替えるということが定着している。

x と y の変数の入れ替えについて、実験の後レポートに、中三の生徒（尾林慶治）が「いちいち逆関数にするとき、x を y に変えなければならない。なぜ変えないでやらないのだろう」と書いている。逆関数で本質的なのは、逆の対応であって変数がどんな文字で表されるかということは副次的な問題であるということが意識されているではないか。

$y=x^2$ の逆関数については「存在しない」と正解した者が高1、2ともに、非常に少ない。もちろん、$y=x^2$（$x\geqq 0$）のように定義域を与えたら正しく求められたかも知れない。また、問2の一次関数の逆関数を求めさせずに、二次関数のみにすれば、結果が違ったかもしれない。しかし、問題1で「1対1対応」を知っているかどうかを調査して、具体的な問題解決にその概念が利用できるかどうかを調査するために、問題3のような型の質問にした。

高1の生徒で「存在しない」と答えた2名のうち1名は問題1で1対1対応に言及しており、他の1名は、具体例を用いて説明していた。高2の生徒で、「存在しない」と正答した者4名のうち、3名は「1対1対応」に言及していた。しかし、問題1の分析から分かるように、問題1で「1対1対応」に触れながら（20名）、$y=x^2$ の逆の対応が1対1対応にならないこと気付かない者（16名）が多いことは、逆関数が高2になっても確実に身についていないことを示している。逆関数が中学から削除された理由もこの辺にあるのであろう。また、今回の改訂による「数学Ⅰ」における逆関数の取扱いも、教科書Cでわかるように、1対1対応について、十分留意して教授しないと、定着しない危険もある。高校生の大多数が「数学Ⅰ」（必修）で終了することを考えれば、逆関数の指導に工夫と研究が必要であろう。