

# Nara Women's University

## Efficient mixings of fluids via pseudo-Anosov automorphisms : Abstract of the Dissertation and the Summary of the Examination Results

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 奈良女子大学 公開日: 2009-12-25 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 梅田, 早希, 小林, 毅, 小磯, 深幸, 柳沢, 卓, 上江洌, 達也, 松岡, 隆 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10935/1156">http://hdl.handle.net/10935/1156</a>

氏名(本籍)	梅田早希 (奈良県)
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	博課第421号
学位授与年月日	平成21年3月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当 人間文化研究科
論文題目	Efficient mixings of fluids via pseudo-Anosov automorphisms (擬アノソフ写像を利用した流体の効率的混合)
論文審査委員	(委員長) 教授 小林 毅 教授 小磯 深 幸 准教授 柳 澤 卓 教授 上江洲 達 也 教授 松 岡 隆 (鳴門教育大学学校教育研究科)

## 論文内容の要旨

この論文では、粘性の高い流体のかき混ぜの位相的特性を取り扱っている。このような流体のかき混ぜは、数値流体力学における重要な研究対象の一つであり、化学工業や生物化学産業等への応用が期待されている。

第1節では、この研究の歴史的背景を紹介している。粘性の高い液体のかき混ぜの特性を単純化したものとして EAM (eccentric annular mixer) と呼ばれる装置がある。これは外側と内側のシリンダーの間に液体を満たし、内側と外側のシリンダーを交互に回転されることで液体のかき混ぜを実現するものである。Finn-Cox はより効率的なかき混ぜのシステムとして TRM (translating, rotating mixer) を提案した。これは、内側のシリンダーが回転するだけでなく、外側のシリンダーの内部を動き回ることによって液体をかき混ぜるというものである。これらの装置は、容器に入った液体をそこに突き立てられたシリンダーを周期的に動かすことによりかき混ぜを実現している。数学的には、液体の表面を曲面とみなし、液体に突き立てられたシリンダーのふちを曲面の境界とみなすことにより、この装置の一周期の動きは曲面上の自己同相写像に対応させることができる。一方、位相幾何学の観点から、Nielsen-Thurston はコンパクト向き付け可能な曲面上の向きを保つ自己同相写像は periodic 型 (周期的)、pseudo-Anosov 型 (カオス的)、reducible 型 (periodic 型のものと pseudo-Anosov 型のものを組み合わせて得られる) のいずれかになることを示した。Boyland-Stremmler-Aref は2000

年に発表した論文の中でこの Nielsen-Thurston theory を利用して、TRM を BSD (batch stirring device) と呼ばれるシステムに一般化した。これは、内側にある有限個のシリンダーが外側のシリンダーの内部で pseudo-Anosov 型に対応する動きをして液体をかき混ぜる。本論文では、このようなかき混ぜ装置をより効率的な方法で実現する事、及び、位相幾何学における様々な技法を用いて、考えている装置が pseudo-Anosov 型のかき混ぜを実現している事を示す方法について取り扱っている。

第 2 節では、この論文で取り扱う概念について紹介している。2.1 節では、曲面の自己同相写像に関する Nielsen-Thurston 理論について紹介している。2.2 節では、幾何的な組みひもについて紹介している。2.3 節では、 $n$  次の組みひも群と  $n$  点穴の空いた円板の写像類群について紹介している。特に、linking number と呼ばれる量を使って  $n$  点穴の空いた円板の自己同相写像が pseudo-Anosov 型であることを判定する方法について述べている (Propositions 2.3.1, 2.3.2)。2.4 節では、容器に入った粘性の高い流体の、有限個の rod ( : 半径 0 のシリンダー) によるかき混ぜと組みひもの関係について紹介している。

第 3 節では、2、3 個のギヤを使って実際に製作した pseudo-Anosov 型のかき混ぜを実現する機構について述べている。液体をかき混ぜる 3 本の rods ( : 半径 0 のシリンダー) の動きに対応する組みひもを調べ、それが pseudo-Anosov 型であることを Hall の手法を使って示している。

第 4 節では、内トロコイド曲線を利用したかき混ぜ装置を提案している。これは、内側にギヤの歯がついた容器と、半径が容器の  $1/3$  のギヤからなる。このギヤには、容器内の流体をかき混ぜる 4 本の rods が取り付けられている。このギヤの歯は容器の歯と噛み合っており、容器の淵に沿って転がる。更にこれらの rods とぶつからない位置に障害物を配置する。この rods と障害物が流体のかき混ぜを実現している。4.1 節では、結び目理論の linking number を使って、かき混ぜが pseudo-Anosov 型であることの証明を与えている。更に、このような例に対して、実際に装置を作成し、かき混ぜの様子を観察している。4.2 節では、4.1 節の linking number の議論だけでは pseudo-Anosov 型であることが証明できないような例を取り扱っており、三次元多様体論の切り貼り技巧を用いて実際に pseudo-Anosov 型になっていることを示している。4.3 節では、3 重の対称性を持つかき混ぜ装置について考察している。ここでは、位相幾何学における被覆空間の理論を利用して、与えられたかき混ぜ装置が pseudo-Anosov 型であることを示している。

第 5 節では、Gouillart-Thiffeault-Finn によって導入された ghost rod の概念について紹介している。更に第 4 節で取り扱ったかき混ぜ装置で障害物が中心の一点だけからなるようなものに対して実験を行い、そこに ghost rod が存在している可能性があることを報告している。

# 論文審査の結果の要旨

提出された論文の記載に従って、その内容について述べる。

本論文は五つの節から構成されている。

1 節ではこの研究の歴史的背景について紹介した後に、この論文で取組むテーマが述べられている。

第 2 節では、この論文で取り扱う概念について紹介している。2.1 節では、曲面の自己同相写像に関する Nielsen-Thurston 理論について紹介している。特に曲面上の自己同相写像は periodic 型、pseudo-Anosov 型、又は reducible 型のいずれかになるという Nielsen-Thurston の定理 (Theorem 2.1.8) が紹介されている。2.2 節では、幾何的な組みひもについて紹介している。2.3 節では、 $n$  次の組みひも群と  $n$  点穴の空いた円板の写像類群について紹介している。特に、linking number を使って自己同相写像が pseudo-Anosov 型であることを判定する方法について述べている (Propositions 2.3.1, 2.3.2)。この結果は純粋に位相幾何学的な条件を用いて与えられた写像がカオス的な振る舞いをする点を示している点で非常に興味深い。2.4 節では、容器に入った粘性の高い流体の、有限個の rod ( : 半径 0 のシリンダー) によるかき混ぜと組みひも間の対応について紹介している。2 節では流体のかき混ぜと曲面の自己同相写像、組みひも間の関係が要領よくまとめられている。

第 3 節では、申請者によって提案された 2、3 個のギヤを使った pseudo-Anosov 型のかき混ぜを実現する機構について述べてられている。ここではこの装置の 3 本の rods の動きに対応する組みひもを調べ、これをもとに具体的にそこから生じる安定葉層、不安定葉層を Hall の手法を使って構成することによりそれが pseudo-Anosov 型であることを示している。これは申請者の流体のかき混ぜに関する深い理解を示す結果であると見なすことが出来る。

第 4 節では、内トロコイド曲線を利用したかき混ぜ装置を提案している。これは、内側にギヤの歯がついた容器と、半径が容器の  $1/3$  のギヤからなる。このギヤには、容器内の流体をかき混ぜる 4 本の rods が取り付けられている。このギヤの歯は容器の歯と噛み合っており、容器の淵に沿って転がる。更にこれらの rods とぶつからない位置に障害物を配置する。この rods と障害物が流体のかき混ぜを実現している。ここでは障害物をどのように配置すれば pseudo-Anosov 型のかき混ぜが生じるかが問題となる。4.1 節では、2.3 節で与えた結び目理論の linking number に関する結果を使って、いくつかの障害物の配置が pseudo-Anosov 型のかき混ぜを与える事を証明している。更に、このような例に対して、実際に装置を作成し、かき混ぜの様子を観察している。4.2 節では、4.1 節の linking number の議論だけでは pseudo-Anosov 型であることが証明できないような例を取り扱っており、三次元多様体論の切り貼り技巧を用いて実際に pseudo-Anosov 型になっていることを示し

ている。4.3節では、3重の対称性を持つかき混ぜ装置について考察している。ここでは、位相幾何学における被覆空間の理論を利用して、問題となっているかき混ぜが pseudo-Anosov 型であることを示している。4.1節の結果は非常に単純な機構で pseudo-Anosov 型のかき混ぜが実現できる事を示しており、実際のかき混ぜに適用する上での成果に結びつくことが期待できる。4.2節の結果については三次元位相幾何学固有の議論を用いている部分に、また4.3節の結果は位相幾何学の被覆空間の理論を適用する部分に高い独創性を見出すことが出来る。実際この様な結果をかき混ぜの問題に適用する例はこれまでに見られないものであり、この論文が高いレベルにあることを示していると認められる。

第5節では、Gouillart-Thiffeault-Finn によって導入された ghost rod の概念について紹介した後、第4節で取り扱ったかき混ぜ装置で障害物が中心の一点だけからなるようなものに対して実験を行い、そこに ghost rod が存在している可能性があることを報告している。この結果は実用上非常に有用な装置が出来る可能性を示唆すると共に、ghost rod の存在を数学的に厳密に証明する事を目指すことで数学的にも、これまでに無い新しい理論が生まれることを示唆するものであり、この研究のこれからの大きな発展の可能性を示していると認められる。

以上に述べたようにこの論文の内容は、現在多くの研究者によって取り扱われている、流体のかき混ぜに関して申請者が十分に高いレベルの学力を有している事を示していると同時にこの分野における本質的に新しい発展を与えると共に、これからの更なる大きな展開を期待させるのもであると見なすことが出来る。

よって、本学位論文は、奈良女子大学博士（理学）の学位を授与されるに十分な内容を有していると判断した。