

# Nara Women's University

## 4次元超対称非線形シグマ模型の定式化におけるアノマリーと有効ポテンシャルの解析

メタデータ	言語: 出版者: 公開日: 2021-05-07 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 近藤,綾 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10935/5567">http://hdl.handle.net/10935/5567</a>

令和2年度博士学位論文

4次元超対称非線形シグマ模型の定式化における  
アノマリーと有効ポテンシャルの解析

奈良女子大学大学院  
人間文化総合科学研究科 複合現象科学専攻

近藤 綾

2021年1月



# 目次

第 1 章	序論	1
1.1	はじめに	1
1.2	本研究の動機と目的	4
1.3	本論文の構成	5
第 2 章	超対称性	7
2.1	超対称代数とその表現	7
2.2	超対称ラグランジアンの構成	10
2.2.1	超場形式	10
2.2.2	カイラル超場	13
2.2.3	ベクトル超場	16
2.3	ゲージ不変相互作用	20
2.4	自発的対称性の破れ	24
第 3 章	非線形シグマ模型	31
3.1	非線形表現	31
3.2	非線形シグマ模型と超対称性	32
第 4 章	超対称 $CP^{N-1}$ 模型	35
4.1	隠れた局所対称性とアノマリー	35
4.2	Harada-Tsutsui の方法	37
4.3	グローバル構造と非斉次座標	38
4.4	カットオフ理論におけるアノマリー項の導出	39
4.5	$1/N$ 展開における有効ポテンシャル	42
4.6	動的ベクトル超多重項	45
第 5 章	$F$ 項による拘束条件を課した非線形シグマ模型	49
5.1	$SO(N)/SO(N-2) \times U(1)$ 模型	49

5.2	$F$ 項を含めた有効ポテンシャル . . . . .	50
第 6 章	超対称 NJL 模型と隠れた局所 $U(1)$ 対称性	53
6.1	隠れた対称性のアノマリーと Wess-Zumino 項 . . . . .	53
6.2	Wess-Zumino 項の導出 . . . . .	55
6.3	アノマリーの高次補正 . . . . .	56
6.4	アノマリー項のスーパーポテンシャルへの効果 . . . . .	58
6.5	質量項を加えた超対称 NJL 模型 . . . . .	59
第 7 章	結論と議論	63
付録 A	カットオフ理論でのファイマン積分	69
参考文献		73

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 はじめに

素粒子物理学はミクロの世界の自然法則を明らかにしていく学問であり、1930 年代に誕生以来これまでに多くの革新をへてきた。1897 年に電子が発見され、物質の最小単位が原子でないことが明らかになった。1911 年には原子核が、1919 年には陽子、1932 年には中性子が発見され、その後 1964 年に陽子や中性子を構成する素粒子であるクォークの存在が予言され、1960 年代の終わりから 1970 年代初めに行われた一連の深非弾性散乱の実験によってその存在が明らかになった。その後も、多くの研究や実験の積み重ねにより、素粒子物理学は大きな進展を遂げてきた。そして現在の素粒子物理学には、規範として標準理論と呼ばれるものが存在している。標準理論とは、現代素粒子物理学の基本的な枠組みであり、ここでは 12 種類のフェルミオン（クォークとレプトン）、5 種類のボソン（4 種類のゲージボソンと 1 種類のヒッグスボソン）の、計 17 種類の素粒子が存在する。この 17 個の素粒子によって、物質とその間の相互作用が上手く記述できることがこれまでの数々の実験から示されてきた。

しかしながら、現代物理学の規範といわれている標準模型においても、説明できない点はある。例えば、ヒッグス質量における「不自然さ」の問題である。ヒッグス粒子の質量  $m_H$  は 2 次発散を含むため、カットオフパラメータ  $\Lambda$  を用いての量子補正を受ける。

$$m_{hR}^2 = m_H^2 + O\left(\frac{1}{100}\right)\Lambda^2 \quad (1.1)$$

ここで、 $m_{hR}$  は繰り込みを通して観測値と見なされる質量で、その大きさは  $O(10^2)\text{GeV}$  である。 $O(1/100)$  は種々の結合定数を含む係数で、標準理論の摂動展開から計算される量である。 $\Lambda$  は理論の適応限界であり  $\Lambda \sim 10^{16\sim 19}\text{GeV}$  である。もし、電弱統一理論がプランクスケール ( $M_P \sim 10^{19}\text{GeV}$ ) まで成立するならば、 $m_h^2$  と  $O(1/100)\Lambda^2$  との間で実に 32 桁ほどの微調整を行うことになり、極めて不自然である。

フェルミ粒子、ゲージ粒子の質量は自然さを持つパラメータであり、それぞれが0に近づくとカイラル対称性、ゲージ対称性が出現する。「自然さ」の反映として、フェルミ粒子やゲージ粒子の質量では輻射補正が対数発散  $\log \Lambda$  に緩和されており、ヒッグス粒子のような微調整を必要としない。つまり、標準理論において「不自然さ」の性質をもつのはヒッグス場のみなのである。そこで、自然界がヒッグス粒子の質量に関して微調整を行っていないとすると、カットオフパラメータは  $\Lambda \leq O(1)\text{TeV}$  をみたすと考えられる。つまり、自然さがみたされていれば、TeV スケールに標準模型を超える新しい物理が存在することになる。その一つの候補が超対称性理論なのである。

超対称性はボソンとフェルミオンを統一的に扱う時空の対称性を一般化した概念であり、今日の素粒子の統一理論において大変重要なものだと考えられている。現在、素粒子の基本的エネルギースケールに比べ、現在までの実験で確立している標準模型のエネルギースケールは非常に小さく(ゲージ階層性)、超対称性はこのゲージ階層性問題を対称性の観点から説明するのに役立つ。その一方で、自然界で観測されている素粒子には、現在までのエネルギー実験ではこのような対称性は実現されていない。これは、超対称性が自発的破れを起こしているためだと考えられる。

さらに、超対称性理論を考えることは、理論間の双対性を扱うことにも有用でもある。摂動論に基づく場の理論の計算だけでは、強結合領域における場のふるまいを知ることは非常に困難であり、理論を完全には理解しがたい。こうした側面に双対性が有用である。双対性とは、元の理論と対応がついている別の理論を用いることで、解析が困難であった強結合領域を含めた全貌を明らかにするという概念である。

超対称性の自発的破れを実現するモデルとして、Fayet-Iliopoulos 模型 [1] と Fayet-O'Raifeartaigh 模型 [2, 3] がよく知られている。一般に、超対称性理論のポテンシャルは  $D$  項と  $F$  項と呼ばれる項の和から成っており、超対称性が破れていない真空では両方の項がともに0になっている。前者の模型では、ポテンシャルの  $D$  項と  $F$  項が同時に0になれず、超対称性を保つ安定点が存在しないことが示される。後者の模型では、複数ある  $F$  項が同時に0にならず超対称性が破れている。他にも超対称性を動的に破る模型が知られているが、それらはやや間接的な模型や解析が難しいゲージ理論であるか [4, 5, 6]、Seiberg 双対性によって Fayet-O'Raifeartaigh 模型に帰着させて解析が行われる模型である [7]。

このため、超対称性の破れを実現する、より直接的で単純な模型を構成することが望まれる。そのような模型が実現できれば、南部・Jona-Lasinio (NJL) 模型 [8, 9] がQCDにおけるカイラル対称性の動的破れを扱う模型として用いられたように、超対称性のソフトな破れの項を動的に生成する現象論的な模型を構築するために利用できるであろう。本研究のそもそもの動機は超対称性の破れを実現する単純な模型を構築することであり、超対称 NJL 模型、超対称非線形シグマ模型のダイナミクスを調べることから研究が始まった。

非線形シグマ模型は低エネルギー有効理論としてみなされ、関連する自由度はグローバル対称性の破れに伴う質量がゼロの南部-Goldstone(NG) ボソンの数に一致する。商多様体に基づく非線形シグマ模型が、隠れた局所対称性をもつ線形模型と等価であることは良く知られている。興味深いのは、隠れた局所対称性におけるゲージ場は余分な変数ではあるが、動的ベクトルボソンが量子補正により4次元でさえ生成されうる点である。

超対称性をもつ場の理論における研究では、Zumino が非線形模型のスカラ場がケーラー多様体に値をとることを示し、グラスマン多様体における作用の形を明確に与えた [10]。より一般的な商多様体における非線形表現は、論文 [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] で示されており、非線形ラグランジアンを構成する一般的な方法が与えられている。その特徴は、ゼロ質量のフェルミオンが NG ボソンの超対称パートナーとして現れることである。これらの NG ボソンと超対称パートナーのフェルミオンは、 $\mathcal{N} = 1$  超対称性をもつ4次元カイラル超場により記述される。そして、超対称性の要求から、ターゲット空間はケーラー多様体でなければならない。

隠れた局所対称性をもつ超対称非線形シグマ模型は [19, 20, 21, 22] においていくつかのケーラー多様体上で研究されており、2000年に東島-新田により一般化されている [23]。そこでは、もしターゲット多様体がエルミート対称空間であるなら、超対称非線形シグマ模型は線形化されたゲージ理論として定式化されることが示されている。しかしながら重要な点は、この2つの模型の「古典的」な一致が示されているに過ぎないことである。

超対称非線形シグマ模型は量子場の理論として研究されてきて、2次元では多くの興味深い結果が明らかにされてきた [24, 25, 26, 27]。しかし、非線形シグマ模型は4次元では繰り込み不可能であるため、NJL 模型のように紫外運動量カットオフをもった理論により定義されるか [8]、非摂動的な手法により定義される。超対称性が量子論的な解析の難易度を上げるが、それは物理的なものではなく技術的なものであり、カットオフをもつ超対称性理論が取り扱えないわけではない。

4次元の超対称非線形模型における最も決定的な問題は、隠れた局所対称性がカイラル超場に作用するため、一般的にはこの模型にアノマリーが含まれることである。例えば、ゲージ化された線形模型として次のようなケーラーポテンシャルを考える。

$$K(\phi, \phi^\dagger) = \phi^\dagger e^{2V} \phi - \frac{2}{g^2} V$$

ここで  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) はカイラル超場であり、 $V$  は  $U(1)$  ゲージベクトル超場である。最後の項は Fayet-Iliopoulos (FI) 項で、 $g$  は結合定数である。この模型には大局的対称性  $SU(N)$  と局所対称性  $U(1)$  がある。この線形模型が非線形シグマ模型の一種である  $CP^{N-1}$  模型と等価であることを見るためには、ゲージ固定条件として  $\phi_N = 1$  にとればよいとされてきた [22, 23]。運動方程式により  $V$  を消去することで、 $CP^{N-1}$  模型のケーラーポテンシャルが得られ、そのターゲット多様体は、残りのカイラル超場によってパラ

メタライズされる。しかし、アノマリーをもつ隠れた局所対称性は任意の固定条件をとることを許さない。つまり、このモデルでは  $U(1)$  がアノマリーをもつために、 $CP^{N-1}$  モデルに書き換えることができないのである。

このアノマリーの問題を回避する策として、例えば、ゲージ化された線形モデルでアノマリーをもたない隠れた局所対称性を考える方法がある。あるいは、アノマリーをキャンセルするためにベクトル超場に結合させた追加のカイラル超場を加えるという方法もある。しかしながら、どちらの方法もエルミート対称空間に基づいた非線形シグマモデルの定式化には有効ではない。

本論文ではカイラル超場のみを含み、明確に定義されたアノマリーのない超対称非線形シグマモデルから始める。そして、補助ベクトル超場を導入し、ルジャンドル変換を行うことによってモデルを書き直していく。この段階では、元のラグランジアンがゲージ不変でなく、経路積分測度がゲージ体積で割られていないため、ベクトル超場はゲージ場ではない。次に、[28] の拡張として [29] で用いられたアノマリーをもつゲージ理論の量子化の手法により、Fadeev-Popov 行列式を分配関数に挿入していく。結果として、元の非線形シグマモデルと等価であるゲージ化線形モデルが、Wess-Zumino 項を加えた形で得られることになる [30]。

上記の手順の概念的な設定は新しいものではなく、30 年以上前に de Wit と Grisaru により論じられたものとはほぼ同じであることを述べておく [31]。彼らは、アノマリーは常にコンペンセーター場を用いたカウンター項を加えることにより消去できると述べており、 $CP^{N-1}$  モデルの場合はカイラル超場  $\phi_i$  がコンペンセーター場を含んでいる。しかしながら、我々の手法の新しい点は、コンペンセーターとして様々な変数の選択肢がある中で、どの場がコンペンセーターであるべきかが明白なことである。結果として、我々の手法で Wess-Zumino 項を唯一に決めることができるのである。

## 1.2 本研究の動機と目的

本研究では 4 次元におけるターゲット多様体  $CP^{N-1}$  と  $SO(N)/SO(N-2) \times U(1)$  上の超対称非線形シグマモデルを扱う。超対称非線形シグマモデルは補助場の方法により線形化された理論として定式化されるが、先に述べたとおり、隠れた局所対称性がアノマリーをもつために、Wess-Zumino 項を加えなければならない。この Wess-Zumino 項がゲージ化された線形モデルにおいてどのような影響を及ぼすのかを明らかにする。

このアノマリーを考慮したゲージ理論の量子化の応用として、2016 年に Cheng, Dai, Faisal, Kong により研究されたモデルを取り扱う [32]。Cheng-Dai-Faisal-Kong モデル (CDFK モデル) は、超対称性の自発的破れを引き起こす、ある種の超対称性 NJL モデルとして提唱された。しかし、2016 年日大理工・益川塾連携素粒子物理学シンポジウムにお

いて、九後により補助場の方法を用いた CDFK 模型の再解析についての講演があり、超対称性は自発的に破れるが負計量をもつ粒子が出現すると結論されている [33]。この再解析では補助超場を導入し、隠れた局所対称性におけるゲージ固定条件を軸性ゲージから Wess-Zumino ゲージに変更して模型を解析している。しかし、先に述べた通り、CDFK 模型の隠れた局所対称性にはアノマリーが存在するため、正確にはアノマリーを考慮した解析を行う必要がある。

## 1.3 本論文の構成

以下にこの論文の構成を述べる。

第 2 章では超対称性の一般的な構造について [34] に基づいて述べる。超対称性を保つラグランジアンを構成するために、時空の座標をグラスマン座標まで拡張することで、ボソンとフェルミオンをひとまとめに扱う超場 (多重項) を導入する。超場は超対称代数の線形表現であり、共変な拘束条件により余分な成分場を減らすことができる。拘束条件を課すことで得られるカイラル超場とベクトル超場について詳細に述べていく。また、超対称性を自発的に破る模型を第 2.4 章で簡単に紹介する。第 3 章では、超対称性をもたない非線形シグマ模型からはじめ、その超対称性化について述べる。

第 4 章では、超対称性  $CP^{N-1}$  模型について詳細に述べる。第 4.1 章、4.2 章では、超対称  $CP^{N-1}$  模型をゲージ化線形模型として定式化し、カイラル超場のヤコビアン因子より Wess-Zumino 項を導出する。超対称  $CP^{N-1}$  模型は Wess-Zumino 項をもつ線形模型と量子論的に等価である。第 4.3 章では、我々の模型が  $CP^{N-1}$  多様体の全体をカバーしていることを確認する。第 4.4 章で、三角ダイアグラムより与えられた 3 点頂点関数を計算し、運動量カットオフを含んだ理論で Wess-Zumino 項を厳密に求める。繰り込み可能な理論において、三角ダイアグラムのファイマン積分は  $1/\Lambda$  のべきにより展開され、 $\Lambda \rightarrow \infty$  において有限な項のみがアノマリーに影響してくる [35]。ここでは、 $1/\Lambda$  の高次項まで含めた厳密なアノマリー項を得る。第 4.5 章では、先に導出したアノマリーを加えて、ゲージ化された線形模型の解析を  $1/N$  リーディングオーダーで行う。模型には臨界結合定数があり、それより小さい結合定数の領域では  $U(1)_{\text{local}}$  対称性が破れ、超対称性は破れない。しかしながら、[36] のボゾン型  $CP^{N-1}$  模型とは対照的に、超対称模型の  $1/N$  リーディングオーダーでは臨界点を越えて安定な真空が存在しないことを示す。第 4.6 章では、[34] のボゾン型  $CP^{N-1}$  模型と同様に、不安定なベクトル超多重項が動的に生成されることについて議論する。臨界点に近づくとベクトル多重項がゼロ質量になる傾向があるのは興味深い。この振る舞いから、 $U(1)_{\text{local}}$  対称性が臨界点で回復することが一つの可能性として考えられる。

第 5 章では、 $F$  項による拘束条件を課した非線形模型の例として、 $SO(N)/SO(N -$

2)  $\times U(1)$  模型について考える。 $F$  項が模型に加えられるが、定性的な特徴は変わらない。

そして、第 6 章では、CDFK 模型の解析について述べる。[33] と同様、質量をもたない超対称 NJL 模型から始める。Wess-Zumino 項が経路積分による量子化によって得られ、高次補正まで含めた Wess-Zumino 項がスーパーポテンシャルのみに影響することを示す。臨界点より小さい結合定数の領域では超対称性が破れない。臨界点を超えると超対称性は破れるが、負計量粒子が出現し理論が破綻する。質量項を加えた解析においても、質量をもたない場合と同じ臨界結合定数が得られ、健全な領域では超対称性が保たれ、臨界点を超えると負計量粒子が出現してしまう。[33] と比較すると、アノマリーの効果を加えても CDFK 模型の定性的な性質は変更を受けないという結論である。

## 第2章

# 超対称性

本章では超対称性をもつ場の理論を構成する方法について [34] に基づいて述べる。超対称性をもつ場の理論におけるラグランジアンを記述するために、時空の座標をグラスマン座標に拡張し、ボソンとフェルミオンをひとまとめに扱う超場を導入する。超対称性の既約表現であるカイラル超場とベクトル超場を用いて一般的な超対称ラグランジアンを与える。さらに、超対称性をもつ理論で自発的対称性の破れを引き起こす機構について、例をあげて説明する。

### 2.1 超対称代数とその表現

まず、超対称代数は、超対称変換の生成子  $Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}$  を用いて、

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^A, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m P_m \delta_B^A \\ \{Q_\alpha^A, Q_\beta^B\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}A}, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 0 \\ [P_m, Q_\alpha^A] &= [P_m, \bar{Q}_{\dot{\alpha}A}] = 0 \\ [P_m, P_n] &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

と表される。 $P_m$  は 4 元運動量演算子であり、ギリシャ文字の添字  $(\alpha, \beta, \dots, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots)$  は 1, 2 を走るワイルスピノールの添字を、ラテン小文字  $m, n, \dots$  は 1,  $\dots$ , 4 を走るローレンツ 4-ベクトルの添字を表す。ラテン大文字  $A, B, \dots$  は 1 から  $N$  ( $1 \leq N$ ) まで走る。また、本論文では [34] に基づき、以下の記法を用いる。

計量

$$\eta_{mn} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1),$$

$\sigma$  行列

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

超対称性をもつ場の理論を記述するためには、超対称代数 (2.1) を質量殻条件で制限されない場で表現する必要がある。次のような反交換パラメータ  $\xi$  を用いて計算を進めることにする。

$$\{\xi^\alpha, \xi^\beta\} = \{\xi^\alpha, Q_\beta\} = \cdots = [P_m, \xi^\alpha] \quad (2.2)$$

これらのパラメータにより、超対称代数は交換子の形式で表すことができる。

$$\begin{aligned}[\xi Q, \bar{\xi} \bar{Q}] &= 2\xi\sigma^m\bar{\xi}P_m \\ [\xi Q, \xi Q] &= [\bar{\xi} \bar{Q}, \bar{\xi} \bar{Q}] = 0 \\ [P^m, \xi Q] &= [P^m, \bar{\xi} \bar{Q}] = 0\end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで添字の総和については次のように略記している。

$$\xi Q = \xi^\alpha Q_\alpha, \quad \bar{\xi} \bar{Q} = \bar{\xi}_\alpha \bar{Q}^\alpha$$

多重項は成分となる場 ( $A, \psi, \dots$ ) の組み合わせであり、成分場に対する微小変換  $\delta_\xi$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\delta_\xi A &= (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) \times A, \\ \delta_\xi \psi &= (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) \times \psi, \\ &\vdots\end{aligned} \quad (2.4)$$

(2.3) より、微小変換は

$$\begin{aligned}[\delta_\eta, \delta_\xi] A &= (\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) A \\ &= 2(\eta\sigma^m\bar{\xi} - \xi\sigma^m\bar{\eta}) P_m A \\ &= -2i(\eta\sigma^m\bar{\xi} - \xi\sigma^m\bar{\eta}) \partial_m A\end{aligned} \quad (2.5)$$

を満たす。超対称変換により整数スピンの場は半整数スピンの場と移りあう。(2.1) から  $Q$  は質量次元  $+1/2$  をもち、質量  $l$  の次元をもつ場は  $l+1/2$  をもつ場、もしくはより低次元の場の微分に変換する。

スカラー場  $A$  を変換した場としてスピノール場  $\psi$  を定義する。

$$\delta_\xi A = \sqrt{2}\xi\psi \quad (2.6)$$

$\psi$  は質量次元の高い場と  $A$  自身を微分した場に変換する。

$$\delta_\xi \psi = i\sqrt{2}\sigma^m \bar{\xi} \partial_m A + \sqrt{2}\xi F \quad (2.7)$$

$\partial_m A$  の係数は、

$$\delta_\eta \delta_\xi A = 2i\xi\sigma^m \bar{\eta} \partial_m A + 2\xi\eta F \quad (2.8)$$

の交換子が (2.5) で閉じるように選ぶ。同様に  $\psi$  に作用する交換子から、

$$\begin{aligned} (\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \psi = & -2i(\eta\sigma^n \bar{\xi} - \xi\sigma^n \bar{\eta}) \partial_n \psi \\ & -i\sigma^n \bar{\sigma}^m \partial_m \psi [\eta\sigma^n \bar{\xi} - \xi\sigma^n \bar{\eta}] + \sqrt{2}(\xi\delta_\eta F - \eta\delta_\xi F) \end{aligned} \quad (2.9)$$

が導かれる。これは

$$\delta_\xi F = i\sqrt{2}\bar{\xi} \bar{\sigma}^m \partial_m \psi \quad (2.10)$$

のときに閉じる。このとき、 $F$  に作用する交換子も閉じることがわかる。

場の方程式  $-i\bar{\sigma}^n \partial_n \psi = m\bar{\psi}$  を用いれば、 $F = -mA^*$  ならば (2.10) が満たされることがわかる。この場合、変換 (2.6)、(2.7) は場の方程式を通じて閉じることがいえる。

ここで構成している成分多重項はカイラル多重項もしくはスカラー多重項と呼ばれる。

$$\begin{aligned} \delta_\xi A &= \sqrt{2}\xi\psi \\ \delta_\xi \psi &= i\sqrt{2}\sigma^m \bar{\xi} \partial_m A + \sqrt{2}\xi F \\ \delta_\xi F &= i\sqrt{2}\bar{\xi} \bar{\sigma}^m \partial_m \psi \end{aligned} \quad (2.11)$$

これらの場は超対称代数 (2.1) の線形表現を形成する。もし  $A$  が質量次元 1 をもつなら、 $\psi$  は次元 3/2 となり、一方で  $F$  は次元 2 をもち、補助場の役割を担うことになる。

(2.11) から、 $F$  は  $\delta_\xi$  の下で空間微分へと変換することがわかる。これはいかなる多重項の中の最高次成分に対しても常に当てはまる。

超対称性の下で不変な作用を構成するためには、全微分項に変換する場の組み合わせを見つければよい。そのような組み合わせは以下の 2 つから得られる。

$$\mathcal{L}_0 = i\partial_n \bar{\psi} \bar{\sigma}^n \psi + A^* \square A + F^* F, \quad (2.12)$$

$$\mathcal{L}_m = AF + A^* F^* - \frac{1}{2}\psi\psi - \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi} \quad (2.13)$$

二つを加えたラグランジアン

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + m\mathcal{L}_m \quad (2.14)$$

から、場の方程式を決定することができる。

$$\begin{aligned} i\bar{\sigma}^n \partial_n \psi + m\bar{\psi} &= 0 \\ F + mA^* &= 0 \\ \square A + mF^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

これらは質量  $m$  をもつマヨラナスピノール  $\psi$  と複素スカラー  $A$  を記述し、ボソンとフェルミオンで等しい質量をもっていることがわかる。

ラグランジアン (2.14) は、正規順序  $::$  をとったものに等しいという興味深い特性をもつ。

$$\mathcal{L} =: \mathcal{L} : \quad (2.16)$$

これは超対称理論において、ボソンとフェルミオンが与えられた質量に対して同じ自由度をもつことを示している。超対称性が保持されている理論である限り (2.16) は保たれる。また、超対称性が破れていない理論において、エネルギー運動量テンソル  $T^{mn}$  の真空期待値が消えることも予想される。これは超対称電荷  $Q_\alpha$  の局所カレント  $J_\alpha^m$  を考えればわかる。

$$Q_\alpha = \int d^3x J_\alpha^0 \quad (2.17)$$

超対称代数 (2.1) はエネルギー運動量テンソル  $T^{mn}$  を反交換子

$$\{\bar{Q}_\alpha, J_\alpha^m\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m T_m^n \quad (2.18)$$

として生成する。それゆえ、 $\bar{Q}_\alpha|0\rangle = 0$  である限りは  $\langle 0|T_m^n|0\rangle = 0$  が保たれる。Bruno Zumino は、観測可能な宇宙の宇宙定数が消えていることをこの事実によって説明できるかもしれないという可能性に最初に気づいたのである。

## 2.2 超対称ラグランジアンの構成

超場は超対称表現の簡潔かつコンパクトな表現を与え、ラグランジアンの構成に非常に有用である。超場は成分表現から構成され、成分場は常にべき展開により超場から再現される。本節ではまず超場と成分場における超対称変換について説明する。超場の既約表現としてカイラル超場とベクトル超場が知られており、これらの超対称ラグランジアンの構成について述べる。

### 2.2.1 超場形式

超対称代数は (2.3) のような反交換パラメータをもつリー代数として見るができる。これにより対応する群要素を定義できる。

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i\{-x^m P_m + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}\}} \quad (2.19)$$

全ての高次交換子が消えるので、Hausdorff の公式  $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A+B]+\dots}$  を用いて2つの群要素の掛け算を行うことは容易である。

$$G(0, \xi, \bar{\xi}) G(x^m, \theta, \bar{\theta}) = G(x^m + i\theta\sigma^m\bar{\xi} - i\xi\sigma^m\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) \quad (2.20)$$

群要素の積はパラメータ空間における移動を生じる。

$$g(\xi, \bar{\xi}) : (x^m, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow (x^m + i\theta\sigma^m\bar{\xi} - i\xi\sigma^m\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) \quad (2.21)$$

この移動は微分演算子  $Q, \bar{Q}$  により生成される。

$$\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q} = \xi^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \right) + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \left( \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m \varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \partial_m \right) \quad (2.22)$$

ここで、微分演算子  $Q, \bar{Q}$  に超対称性の群の生成子と同じ記号を用いるのは、微分演算子が超空間上で微小な群作用を表すためである。

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

ただし、群要素の積の順序と、超空間上の移動の積の順序とが逆になるため、 $P_m = -i\partial_m$  の前の符号が逆になっていることに注意する。(  $G(0, \xi_1, \bar{\xi}_1)G(0, \xi_2, \bar{\xi}_2)$  は  $g(\xi_2, \bar{\xi}_2)g(\xi_1, \bar{\xi}_1)$  に対応する。 )

微分演算子  $D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}$  を

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m \varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \partial_m \end{aligned} \quad (2.24)$$

のように定義しておく。 $D$  と  $\bar{D}$ 、および  $D$  と  $Q$  はそれぞれ次のような反交換関係を満たす。

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} &= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \\ \{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (2.26)$$

さて、超場と超空間を導入していく。超空間上の要素（点）はグラスマン数  $\theta, \bar{\theta}$  を用いた座標  $z = (x, \theta, \bar{\theta})$  で表される。超空間上の関数を超場といい、 $\theta$  と  $\bar{\theta}$  のべき級数として展開すると次式のようなになる。

$$\begin{aligned} F(x, \theta, \bar{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ &\quad + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} n(x) + \theta\sigma^m\bar{\theta} v_m(x) \\ &\quad + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} d(x) \end{aligned} \quad (2.27)$$

展開した係数の場はスカラー場  $f(x)$ 、ワイルスピノール  $\psi, \bar{\chi}$  等となり、様々な場が一つの超場の中に含まれていることがわかる。グラスマン数の反交換性より  $\theta, \bar{\theta}$  の高次のべきが消えるため、 $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$  という 4 次の項が最高次数となる。

超場に対する変換則は次のように定義される。

$$\begin{aligned}
\delta_\xi F(x, \theta, \bar{\theta}) &= \delta_\xi f(x) + \theta \delta_\xi \phi(x) + \bar{\theta} \delta_\xi \bar{\chi}(x) \\
&\quad + \theta \theta \delta_\xi m(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \delta_\xi n(x) + \theta \sigma^m \bar{\theta} \delta_\xi v_m(x) \\
&\quad + \theta \theta \bar{\theta} \delta_\xi \bar{\lambda}(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \delta_\xi \psi(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \delta_\xi d(x) \\
&\equiv (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) F
\end{aligned} \tag{2.28}$$

ここで  $Q$  と  $\bar{Q}$  は微分演算子 (2.22) である。各成分場の変換則は、 $\delta_\xi f(x) = (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) f(x)$  の両辺で  $\theta, \bar{\theta}$  に比例する係数を比較することで得られる。これら各成分の変換の交換子は、(2.22) の結果として (2.5) を満たすことがわかる。

超場の線形結合もまた超場になることは容易に示せる。 $Q, \bar{Q}$  が線形微分演算子であるため、超場の積もまた超場となる。これらから、超場が超対称代数の線形表現であることがわかる。

しかし、超場  $F(x, \theta, \bar{\theta})$  には多くの成分が含まれており、共変的な条件を課して余分な成分場を消去することによって既約表現にすることができる。すなわち、超場を用いることによって、超対称性の表現を見つける問題を適切な条件を見つける問題へと変更することができる。ここで、 $x$  空間における微分方程式によって  $x$  依存性を制限することなく、超場の余分な自由度を減らさなければならないことに注意する。

拘束条件として  $\bar{D}\Phi = 0$  を満たす超場をカイラル超場 (スカラー超場) とよぶ。この条件だけでは  $x$  空間での微分方程式とならないが、その他の条件が加わって微分方程式を与えるときもある。例えば、 $D\Phi = \bar{D}\Phi = 0$  は  $\Phi = a = (\text{定数})$  となるが、 $DD\Phi = \bar{D}\Phi = 0$  はゼロ質量の場の方程式となる。

一方、 $V = V^\dagger$  を満たす超場はベクトル超場と呼ぶ。カイラル超場とベクトル超場については、次節で詳しく説明する。

成分多重項から超場を形成することは常に可能である。多重項の任意の成分  $A$  からはじめて、演算子  $\exp(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})$  を作用させるとする。これによって超場のように変換する  $x, \theta, \bar{\theta}$  の関数が与えられる。

$$F(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})} \times A = A + \delta_\theta A + \dots \tag{2.29}$$

関数  $\delta_\xi F(x, \theta, \bar{\theta})$  を、 $\theta, \bar{\theta}$  のべき級数に展開したとき、その係数が次のように変換された成分場を表すように定義する。

$$\delta_\xi F(x, \theta, \bar{\theta}) = (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) \times F \tag{2.30}$$

ここで、積  $\times$  は (2.4) で定義される。この積は成分場に作用し、パラメータ  $\theta, \bar{\theta}$  と交換す

る。Hausdorff の公式より、次式が得られる。

$$\begin{aligned}\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} e^{(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})} \times &= \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} e^{\theta Q} e^{\bar{\theta} \bar{Q}} e^{-\theta \sigma^m \bar{\theta} P_m} \times \\ &= (\xi Q - \xi \sigma^m \bar{\theta} P_m) \times e^{(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})} \times \\ \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} e^{(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})} \times &= (\bar{\xi} \bar{Q} + \theta \sigma^m \bar{\xi} P_m) \times e^{(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})} \times\end{aligned}\quad (2.31)$$

これは  $\exp(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})$  にかかる  $\xi Q \times$ 、 $\bar{\xi} \bar{Q} \times$  が、微分演算子  $\xi Q$ 、 $\bar{\xi} \bar{Q}$  によって表されることを示す。

$$\delta_\xi F(x, \theta, \bar{\theta}) = (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) F \quad (2.32)$$

(2.28) と比べると、 $F(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q})} \times A$  が、実際に超対称変換  $\delta_\xi$  の下で超場として変換することがわかる。与えられた成分場の集合に直接対応する成分をもった超場を得るためには、超場は質量次元が最も低い成分場から構成されなければならない。質量次元が最も低い成分場が複数ある場合には、それぞれから超場が生じるが、これらの超場を拘束条件によって関係づけることもできる。

### 2.2.2 カイラル超場

カイラル超場は次の条件を満たし、前節で述べたカイラル多重項と一致している。

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0 \quad (2.33)$$

ここで、

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(x^m + i\theta \sigma^m \bar{\theta}) = 0 \quad \text{かつ} \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} \theta = 0 \quad (2.34)$$

であるので、 $y^m = x^m + i\theta \sigma^m \bar{\theta}$  と  $\theta$  を変数にもつ任意関数が拘束条件 (2.33) を満たすことがわかる。

$$\begin{aligned}\Phi &= A(y) + \sqrt{2} \theta \psi(y) + \theta \theta F(y) \\ &= A(x) + i\theta \sigma^m \bar{\theta} \partial_m A(x) + \frac{1}{4} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \square A(x) \\ &\quad + \sqrt{2} \theta \psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}} \theta \theta \partial_m \psi(x) \sigma^m \bar{\theta} + \theta \theta F(x)\end{aligned}\quad (2.35)$$

これが拘束条件 (2.33) の最も一般的な解であり、次のような  $y, \theta, \bar{\theta}$  を独立変数にとった偏微分による  $D, \bar{D}$  の表式からもこのことがわかる。

$$\begin{aligned}D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^m} \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\end{aligned}\quad (2.36)$$

反カイラル超場  $\Phi^\dagger$  は  $D_\alpha \Phi^\dagger = 0$  を満たす。 $\Phi^\dagger$  は  $y^{\dagger m} = x^m - i\theta\sigma^m\bar{\theta}$  と  $\bar{\theta}$  の関数であり、そのべき級数展開は共役をとることによって (2.35) から得られる。

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger &= A^*(y^\dagger) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y^\dagger) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(y^\dagger) \\ &= A^*(x) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A^*(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square A^*(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x)\end{aligned}\quad (2.37)$$

$y^\dagger, \theta, \bar{\theta}$  を独立変数として  $D$  と  $\bar{D}$  を表せば

$$\begin{aligned}D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - 2i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^m\frac{\partial}{\partial y^{\dagger m}}\end{aligned}\quad (2.38)$$

となり、(2.37) が  $D_\alpha \Phi^\dagger = 0$  の最も一般的な解であることがわかる。

超場の変換則 (2.28) より得られる  $A, \psi, F$  の変換則が、成分多重項の変換 (2.11) になることは容易に確かめられる。微分演算子  $Q, \bar{Q}$  を変数  $y$  で表せば計算は簡単である。

$\Phi$  と  $\Phi^\dagger$  の最高次成分はそれぞれ  $F, F^*$  である。 $\theta, \bar{\theta}$  のさらに高次のべきは時空間微分となるため、スカラー超場 (カイラル超場) の  $F$  もしくは  $F^*$  の成分は常に時空間全微分に変換する。

カイラル超場の積  $\Phi_1\Phi_2\cdots\Phi_\ell$  もまたカイラル超場であり、共役も同様である。

$$\begin{aligned}\Phi_i\Phi_j &= A_i(y)A_j(y) + \sqrt{2}\theta[\psi_i(y)A_j(y) + A_i(y)\psi_j(y)] \\ &\quad + \theta\theta[A_i(y)F_j(y) + A_j(y)F_i(y) - \psi_i(y)\psi_j(y)]\end{aligned}\quad (2.39)$$

$$\begin{aligned}\Phi_i\Phi_j\Phi_k &= A_i(y)A_j(y)A_k(y) \\ &\quad + \sqrt{2}\theta[\psi_iA_jA_k + \psi_jA_kA_i + \psi_kA_iA_j] \\ &\quad + \theta\theta[F_iA_jA_k + F_jA_kA_i + F_kA_iA_j \\ &\quad - \psi_i\psi_jA_k - \psi_j\psi_kA_i - \psi_k\psi_iA_j]\end{aligned}\quad (2.40)$$

しかし、 $\Phi_i^\dagger \Phi_j$  はカイラル超場にはならない。

$$\begin{aligned}
\Phi_i^\dagger \Phi_j &= A_i^*(x) A_j(x) + \sqrt{2} \theta \psi_j(x) A_i^*(x) \\
&+ \sqrt{2} \bar{\theta} \bar{\psi}_i(x) A_j(x) + \theta \theta A_i^*(x) F_j(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} F_i^*(x) A_j(x) \\
&+ \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} [i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (A_i^* \partial_m A_j - \partial_m A_i^* A_j) - 2 \bar{\psi}_{i\dot{\alpha}} \psi_{j\alpha}] \\
&+ \theta \theta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \left[ \frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (A_i^* \partial_m \psi_j^\alpha - \partial_m A_i^* \psi_j^\alpha) - \sqrt{2} F_j \bar{\psi}_{i\dot{\alpha}} \right] \\
&+ \bar{\theta} \bar{\theta} \theta^\alpha \left[ -\frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}} \partial_m A_j - \partial_m \bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}} A_j) + \sqrt{2} F_i^* \psi_{j\alpha} \right] \\
&+ \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \left[ F_i^* F_j + \frac{1}{4} A_i^* \square A_j + \frac{1}{4} \square A_i^* A_j - \frac{1}{2} \partial_m A_i^* \partial^m A_j \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} \partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_j - \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \partial_m \psi_j \right] \tag{2.41}
\end{aligned}$$

この積においては  $\theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta}$  の成分は時空微分に変換することとなる。

さて、カイラル超場のみを含む一般的な繰り込み可能な超対称ラグランジアンを書き下そう。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \Phi_i^\dagger \Phi_i \Big|_{\theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \text{成分}} \\
&+ \left[ \left( \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k + \lambda_i \Phi_i \right) \Big|_{\theta \theta \text{成分}} + \text{h.c.} \right] \tag{2.42}
\end{aligned}$$

結合定数  $m_{ij}, g_{ijk}$  は添え字について対称であるとする。 $y$  から  $x$  へ変更してもラグランジアンは変わらない。

ラグランジアンを成分場で表すと、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i \partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_i + A_i^* \square A_i + F_i^* F_i \\
&+ \left[ m_{ij} \left( A_i F_j - \frac{1}{2} \psi_i \psi_j \right) + g_{ijk} (A_i A_j F_k - \psi_i \psi_j A_k) + \lambda_i F_i + \text{h.c.} \right] \tag{2.43}
\end{aligned}$$

となる。ここで全微分項は落としている。補助場  $F_i$  はオイラー-ラグランジュ方程式を使って消去できる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_k^*} &= F_k + \lambda_k^* + m_{ik}^* A_i^* + g_{ijk}^* A_i^* A_j^* = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_k} &= F_k^* + \lambda_k + m_{ik} A_i + g_{ijk} A_i A_j = 0
\end{aligned} \tag{2.44}$$

ゆえに、ラグランジアンは  $A_i, \psi_i$  で与えられることがわかる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i \partial_m \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^m \psi_i + A_i^* \square A_i - \frac{1}{2} m_{ik} \psi_i \psi_k - \frac{1}{2} m_{ik}^* \bar{\psi}_i \bar{\psi}_k \\
&- g_{ijk} \psi_i \psi_j A_k - g_{ijk}^* \bar{\psi}_i \bar{\psi}_j A_k^* - \mathcal{V}(A_i, A_i^*) \tag{2.45}
\end{aligned}$$

(2.45) においてポテンシャル  $\mathcal{V}$  は

$$\mathcal{V} = F_k^* F_k \quad (2.46)$$

の形をとり、ここで  $F, F^*$  は (2.44) の解である。 $\mathcal{V}$  は常に 0 以上の値であり、 $F_k = 0$  で最小値をとる。

$\Phi = a$  が  $\bar{D}_\alpha \Phi = D_\alpha \Phi = 0$  の解であるので、定数はカイラル超場になることに注意する。従って、任意の超対称ラグランジアンから、 $\Phi_i \rightarrow \Phi_i + a_i$  のシフトを行うことで、ほかの新しいラグランジアンを得ることができる。新しいラグランジアンでは次のパラメータをもつ。

$$\begin{aligned} \lambda'_i &= \lambda_i + m_{ij} a_j + g_{ijk} a_j a_k \\ m'_{ij} &= m_{ij} + 2g_{ijk} a_k \\ g'_{ijk} &= g_{ijk} \end{aligned} \quad (2.47)$$

もし元のポテンシャルが  $\Phi_i = -a_i$  で最小値をとるとすれば、新しいポテンシャルは原点で最小値をとることになる。新しいポテンシャルはパラメータ (2.47) をもつ超対称ラグランジアンのポテンシャルとなる。

繰り込み可能なラグランジアンは  $R$ -不変性によって制限することができる。 $R$  対称性はグラスマン座標を  $\theta \rightarrow e^{i\alpha} \theta$  のように変換する大域的対称性であり、 $R$  は次のようにカイラル超場に作用するものとする。

$$\begin{aligned} R\Phi(\theta, x) &= e^{2in\alpha} \Phi(e^{-i\alpha}\theta, x) \\ R\Phi^\dagger(\bar{\theta}, x) &= e^{-2in\alpha} \Phi^\dagger(e^{i\alpha}\bar{\theta}, x) \end{aligned} \quad (2.48)$$

ここで  $n$  はその超場の  $R$  指標とよばれる。成分場においては (2.48) は

$$\begin{aligned} R : A &\rightarrow e^{2in\alpha} A \\ \psi &\rightarrow e^{2i(n-1/2)\alpha} \psi \\ F &\rightarrow e^{2i(n-1)\alpha} F \end{aligned} \quad (2.49)$$

と変換する。質量項やポテンシャルは  $R$  指標  $n$  の合計が 1 になる場合のみ  $R$  不変となる。

### 2.2.3 ベクトル超場

ベクトル超場は以下の条件を満たす。

$$V = V^\dagger \quad (2.50)$$

ベクトル超場は  $\theta, \bar{\theta}$  のべき級数展開により次式で表される。

$$\begin{aligned}
V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\
& + \frac{i}{2}\theta\theta [M(x) + iN(x)] - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta} [M(x) - iN(x)] \\
& - \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta} \left[ \bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi(x) \right] \\
& - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta \left[ \lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}(x) \right] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \left[ D(x) + \frac{1}{2}\square C(x) \right] \quad (2.51)
\end{aligned}$$

ここで  $C, D, M, N, v_m$  はボソン場、 $\chi, \lambda$  はフェルミオン場である。(2.50) を満たすためには成分場  $C, D, M, N$  と  $v_m$  が実であることが要求される。 $v_m$  というベクトル場が含まれることからベクトル超場とよばれている。

$V$  の成分である  $\theta\theta\bar{\theta}, \bar{\theta}\bar{\theta}\theta, \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$  成分の係数として、特殊な場の組み合わせを選ぶことができる。 $\Phi, \Phi^\dagger$  をカイラル超場、反カイラル超場として、エルミート自己共役な  $\Phi + \Phi^\dagger$  について成分場で見ると

$$\begin{aligned}
\Phi + \Phi^\dagger = & A + A^* + \sqrt{2}(\theta\psi + \bar{\theta}\bar{\psi}) + \theta\theta F + \bar{\theta}\bar{\theta}F^* \\
& + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m(A - A^*) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\psi \\
& + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m\partial_m\bar{\psi} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square(A + A^*) \quad (2.52)
\end{aligned}$$

となる。

この組み合わせは  $\theta\sigma^m\bar{\theta}$  の係数としてゲージ変換の形  $i\partial_m(A - A^*)$  をもつため、 $U(1)$  ゲージ変換の超対称な一般化が

$$V \rightarrow V + \Phi + \Phi^\dagger \quad (2.53)$$

となると期待させる。この変換により、成分場は次のように変換する。

$$\begin{aligned}
C & \rightarrow C + A + A^* \\
\chi & \rightarrow \chi - i\sqrt{2}\psi \\
M + iN & \rightarrow M + iN - 2iF \\
v_m & \rightarrow v_m - i\partial_m(A - A^*) \\
\lambda & \rightarrow \lambda \\
D & \rightarrow D
\end{aligned} \quad (2.54)$$

(2.51) における成分の定義により、 $\lambda$  と  $D$  はゲージ不変となる。

(2.54) より、 $A, F, \psi$  を適当に選ぶことで、 $C, \chi, M, N$  がすべて 0 になるような特殊なゲージが存在することがわかる。このゲージは Wess-Zumino ゲージとよばれて

いる。Wess-Zumino ゲージは今までの超対称性を壊すものの、通常のゲージ変換性  $v_m \rightarrow v_m + \partial_m a$  は保つ。このゲージで  $V$  のべきは簡単に計算できる。

$$\begin{aligned} V &= -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \\ V^2 &= -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v_mv^m \\ V^3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

したがって、ベクトル場  $V$  を Yang-Mills ポテンシャルの超対称な一般化とみなすことができる。対応する超対称な場の強さを構成するためには、 $\lambda_\alpha, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$  が  $V$  におけるゲージ不変な最低次成分場であることを見ればよい。これらはまた  $W_\alpha, \bar{W}_{\dot{\alpha}}$  の最低次成分場でもある。

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V \\ \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}} V \end{aligned} \quad (2.56)$$

これらの超場はカイラルかつゲージ不変である。カイラル拘束条件がみたされることは (2.56) からすぐにわかる。

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot{\beta}}W_\alpha &= 0 \\ D_\beta\bar{W}_{\dot{\alpha}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

また、 $\bar{D}\Phi = D\Phi^\dagger = 0$  を用いてゲージ不変性を示すことができる。

$$W_\alpha \rightarrow -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha(V + \Phi + \Phi^\dagger) = W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}\{\bar{D}, D_\alpha\}\Phi = W_\alpha \quad (2.58)$$

Wess-Zumino ゲージ (2.55) の下で  $W_\alpha$  の成分は簡単に計算できるが、 $y = x + i\theta\sigma\bar{\theta}$  または  $y^\dagger = x - i\theta\sigma\bar{\theta}$  を変数とすることによってさらに単純化できる。

$$\begin{aligned} V &= -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(y) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(y) \\ &\quad + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}[D(y) - i\partial_mv^m(y)] \\ &= -\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(y^\dagger) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(y^\dagger) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(y^\dagger) \\ &\quad + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}[D(y^\dagger) + i\partial_mv^m(y^\dagger)] \end{aligned} \quad (2.59)$$

結果は

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -i\lambda_\alpha(y) + \left[ \delta_\alpha^\beta D(y) - \frac{i}{2}(\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\alpha^\beta (\partial_mv_n(y) - \partial_nv_m(y)) \right] \theta_\beta \\ &\quad + \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y) \\ \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}(y^\dagger) + \left[ \varepsilon_{\dot{\alpha}\beta} D(y^\dagger) + \frac{i}{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\gamma}(\bar{\sigma}^m\sigma^n)^{\dot{\gamma}\beta} (\partial_mv_n(y^\dagger) - \partial_nv_m(y^\dagger)) \right] \\ &\quad - \varepsilon_{\dot{\alpha}\beta} \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\sigma}^{m\dot{\beta}\alpha} \partial_m \lambda_\alpha(y^\dagger) \end{aligned} \quad (2.60)$$

となり、超場  $W_\alpha, \bar{W}_{\dot{\alpha}}$  がゲージ不変な場  $D, \lambda_\alpha$  と  $v_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m$  のみを含むことがわかる。さらに、これらの超場はカイラルかつもう一つの条件式

$$D^\alpha W_\alpha = \bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \quad (2.61)$$

を満たす。 $\theta = \bar{\theta} = 0$  とおけば、この関係式は成分場  $D$  が実であることを表している。(2.61) は、(2.60) もしくは (2.56) により成分場を使って直接的に確かめることができる。(2.60) がカイラリティ条件 (2.57) と拘束条件 (2.61) に対する最も一般的な解を表すことを示すこともできる。

超場  $W_\alpha, \bar{W}_{\dot{\alpha}}$  は最低次の成分場を  $\lambda_\alpha, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$  とする表現の例である。演算子  $\exp(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}) \times$  を作用させることによって  $\lambda_\alpha, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$  から  $W_\alpha, \bar{W}_{\dot{\alpha}}$  を構成することができる。そして、二つの独立な超場  $W_\alpha$  と  $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$  を (2.61) によって関係づけることもできるのである。

$W_\alpha$  はカイラルであるため、 $W^\alpha W_\alpha$  の  $\theta\theta$  成分

$$W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} = -2i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} - \frac{1}{2}v^{mn}v_{mn} + D^2 + \frac{1}{4}v^{mn}v^{\rho\gamma}\varepsilon_{mn\rho\gamma} \quad (2.62)$$

は超対称変換で全微分になる。また、 $W^\alpha W_\alpha$  は

$$W^\alpha W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}W^\alpha D_\alpha V \quad (2.63)$$

と書くこともできる。

(2.62) から、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) \quad (2.64)$$

が自由ベクトル場の超対称ゲージ不変なラグランジアンであることがわかる。部分積分を行うことで、

$$\int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}v^{mn}v_{mn} - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} \right\} \quad (2.65)$$

となる。このラグランジアンはまた  $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$  成分としても表せる。

$$\int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \frac{1}{4} \left\{ W^\alpha D_\alpha V + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{D}^{\dot{\alpha}} V \right\} \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \quad (2.66)$$

(2.66) と (2.64) が等しいことは、関係式 (2.63) と、 $\bar{D}$  と  $\partial/\partial\bar{\theta}$  は  $x$  微分の項のみ異なることからわかる。

ラグランジアン (2.66) には常に質量項  $m^2 V^2$  を加えることができる。この項はゲージ不変ではないため Wess-Zumino ゲージをとって計算することはできない。(2.51) から、

$$\begin{aligned} V^2|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = & -\frac{1}{2}v_m v^m - \chi\lambda - \bar{\chi}\bar{\lambda} + \frac{1}{2}(M^2 + N^2) \\ & -\frac{i}{2}\chi\sigma^m\partial_m\bar{\chi} - \frac{i}{2}\bar{\chi}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi \\ & +\frac{1}{2}C\Box C + CD \end{aligned} \quad (2.67)$$

となることがわかる。この項はベクトル場  $v_m$  に質量を与えるだけでなく、質量多重項において要求される追加の自由度  $C, \chi$  も導入する。質量項 (2.67) を加えたラグランジアン (2.66) は1つのベクトル場と2つのスピン  $\frac{1}{2}$  の場、および1つのスカラー場を記述し、すべての場が同じ質量をもつことになる。

## 2.3 ゲージ不変相互作用

本節では、前節で述べたカイラル多重項とベクトル多重項のゲージ不変相互作用について議論する。まず  $U(1)$  ゲージ理論について記した後、非アーベルゲージ理論に拡張する。

カイラル超場  $\Phi_\ell$  は大局的  $U(1)$  回転の下で、次のように位相が変化する。

$$\Phi'_\ell = e^{-it_\ell\lambda}\Phi_\ell \quad (2.68)$$

$t_\ell$  は  $\Phi_\ell$  の  $U(1)$  電荷、 $\lambda$  は大局的  $U(1)$  回転角度であり、ともに実の定数である。定数  $\lambda$  は、拘束条件  $D_\alpha\lambda = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\lambda = 0$  を満たすカイラル超場として表すこともできる。(2.68) より、 $\Phi'_\ell$  もカイラル超場であることがすぐにわかる。

定数パラメータ  $\lambda$  に対して、変換 (2.68) の下で不変なラグランジアンを容易に構成することができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{K.E.}} + \mathcal{L}_{\text{P.E.}} \\ \mathcal{L}_{\text{K.E.}} &= \Phi_\ell^\dagger \Phi_\ell|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ \mathcal{L}_{\text{P.E.}} &= \left[ \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \right] \Big|_{\dot{\theta}\theta} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.69)$$

$t_i + t_j \neq 0$  もしくは  $t_i + t_j + t_k \neq 0$  のとき、 $U(1)$  不変性は  $m_{ij} = 0$  または  $g_{ijk} = 0$  をそれぞれ要求する。ここで  $\mathcal{L}_{\text{K.E.}}$  はケーラーポテンシャルと呼ばれる。 $\Phi^\dagger$  と  $\Phi$  の積はベクトル超場になり、その  $D$  項 ( $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$  成分) をとると超対称な運動項となる。一方、 $\mathcal{L}_{\text{P.E.}}$  はカイラル超場  $\Phi$  のみからなり、スーパーポテンシャルと呼ばれるものである。

$\lambda$  が  $x$  に依らない定数カイラル超場のとき、(2.68) によりあるカイラル超場が別のカイラル超場へと移される。 $\lambda$  が  $x$  に依存する場合には状況は少し複雑になり、 $\lambda$  は完全なカ

イラル多重項  $\Lambda$  へと格上げされなければならない。

$$\begin{aligned}\Phi'_\ell &= e^{-it\ell\Lambda}\Phi_\ell, & \bar{D}_\alpha\Lambda &= 0 \\ \Phi_\ell^\dagger &= e^{it\ell\Lambda^\dagger}\Phi_\ell^\dagger, & D_\alpha\Lambda^\dagger &= 0\end{aligned}\quad (2.70)$$

この場合にのみ  $\Phi'_\ell$  がカイラル超場にとどまる。

ところが、ラグランジアン (2.69) はこのような局所変換の下で不変ではない。スーパーポテンシャル  $\mathcal{L}_{\text{P.E.}}$  は不変であるが、ケーラーポテンシャル  $\mathcal{L}_{\text{K.E.}}$  が不変性を壊すのである。

$$\Phi_\ell^\dagger\Phi'_\ell = \Phi_\ell^\dagger\Phi_\ell e^{it\ell(\Lambda^\dagger - \Lambda)} \quad (2.71)$$

しかし、次式で変換するベクトル超場  $V$  を導入することにより ((2.53) 参照)、ケーラーポテンシャルを不変にすることができる。

$$V' = V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) \quad (2.72)$$

この修正を加えて、 $U(1)$  ゲージ変換の下で不変なラグランジアンが次式のように与えられることがわかる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4}(W^\alpha W_\alpha|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} + \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\theta\theta}) + \Phi_\ell^\dagger e^{t\ell V}\Phi_\ell|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &+ \left[ \left( \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \right) \Big|_{\theta\theta} + \text{h.c.} \right]\end{aligned}\quad (2.73)$$

このラグランジアン (2.73) は繰り込み不可能に見えるが、 $V^3 = 0$  となる Wess-Zumino ゲージをとれば、

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger e^{tV}\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= FF^* + A\Box A^* + i\partial_n\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\psi \\ &+ tv^n \left( \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\sigma}^n\psi + \frac{i}{2}A^*\partial_n A - \frac{i}{2}\partial_n A^*A \right) \\ &- \frac{i}{\sqrt{2}}t(A\bar{\lambda}\bar{\psi} - A^*\lambda\psi) + \frac{1}{2} \left( tD - \frac{1}{2}t^2v_nv^n \right) A^*A\end{aligned}\quad (2.74)$$

となり、ラグランジアンが質量次元 4 以上の項を含まないため、繰り込み可能であることがわかる。

電気力学の超対称な拡張は 2 つのカイラル超場を用いて行われる。

$$\Phi'_+ = e^{-ie\Lambda}\Phi_+, \quad \Phi'_- = e^{ie\Lambda}\Phi_- \quad (2.75)$$

ラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QED}} &= \frac{1}{4}(WW|_{\theta\theta} + \bar{W}\bar{W}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + \Phi_+^\dagger e^{eV}\Phi_+|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \Phi_-^\dagger e^{-eV}\Phi_-|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &+ m(\Phi_+\Phi_-|_{\theta\theta} + \Phi_+^\dagger\Phi_-^\dagger|_{\bar{\theta}\bar{\theta}})\end{aligned}\quad (2.76)$$

であり、成分場で見れば次のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{QED}} = & \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}v_{mn}v^{mn} - i\lambda\sigma^m\partial_n\bar{\lambda} \\
& + F_+F_+^* + F_-F_-^* + A_+^*\square A_+A_-^*\square A_- \\
& + i(\partial_n\bar{\psi}_+\bar{\sigma}^n\psi_+ + \partial_n\bar{\psi}_-\bar{\sigma}^n\psi_-) + ev^n \left[ \frac{1}{2}\bar{\psi}_+\bar{\sigma}^n\psi_+ - \frac{1}{2}\bar{\psi}_-\bar{\sigma}^n\psi_- \right. \\
& \left. + \frac{i}{2}A_+^*\partial_n A_+ - \frac{i}{2}\partial_n A_+^*A_+ - \frac{i}{2}A_-^*\partial_n A_- + \frac{i}{2}\partial_n A_-^*A_- \right] \\
& - \frac{ie}{\sqrt{2}}(A_+\bar{\psi}_+\bar{\lambda} - A_+^*\psi_+\lambda - A_-\bar{\psi}_-\bar{\lambda} + A_-^*\psi_-\lambda) \\
& + \frac{e}{2}D[A_+^*A_+ - A_-^*A_-] - \frac{1}{4}e^2v_nv^n(A_+^*A_+ + A_-^*A_-) \\
& + m[A_+F_- + A_-F_+ - \psi_+\psi_- - \bar{\psi}_+\bar{\psi}_- + A_+^*F_-^* + A_-^*F_+^*] \quad (2.77)
\end{aligned}$$

(2.77) から、2つのワイルスピノール  $\psi_+, \psi_-$  は結合して、1つの(質量をもつ)ディラックスピノールである電子を形成することがわかる。

さて、変換則 (2.68) は容易に非アーベル群へと拡張できる。

$$\Phi' = e^{-i\Lambda}\Phi, \quad \Phi'^{\dagger} = \Phi^{\dagger}e^{i\Lambda^{\dagger}} \quad (2.78)$$

ここで  $\Lambda$  は行列  $\Lambda_{ij} = T_{ij}^a\Lambda_a$  であり、 $T^a$  はカイラル場  $\Phi$  により定義された表現におけるゲージ群のエルミート生成子である。随伴表現では生成子を以下のように規格化できる。

$$\text{Tr } T^a T^b = k\delta^{ab}, \quad k > 0 \quad (2.79)$$

この規格化の下で、生成子の交換子

$$[T^a, T^b] = it^{abc}T^c \quad (2.80)$$

に現れる構造定数  $t^{abc}$  は完全反対称となる。

変換 (2.72) を次のように拡張すれば、(2.73) は非アーベル型ゲージ変換の下で不変となる。

$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^{\dagger}}e^V e^{i\Lambda} \quad (2.81)$$

ここで  $\Lambda$  と  $V$  は行列である。

$$\Lambda_{ij} = T_{ij}^a\Lambda_a, \quad V_{ij} = T_{ij}^aV_a \quad (2.82)$$

Hausdorff の公式を用いて (2.81) の指数の積を計算する際には、群の生成子の交換子のみが現れることになる。その交換子を交換関係 (2.80) によって評価することで、 $V'$  を次の形式で表すことができる。

$$V' = T^a V'_a \quad (2.83)$$

これは変換 (2.81) が生成子  $T^a$  の表現に依らないことを示している。さらに、この変換則は次式のような  $V$  によらない項から展開される。

$$V' = V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) + \dots \quad (2.84)$$

したがって、非アーベル型のゲージ理論でも  $V^3 = 0$  となる Wess-Zumino ゲージをゲージ固定条件として選ぶことができるのである。

次の Hausdorff の公式

$$e^A e^B = e^{A + \mathcal{L}_{A/2} \cdot [B + \coth(\mathcal{L}_{A/2}) \cdot B] + \dots} \quad (2.85)$$

を用いれば、変換 (2.81) から微小ゲージ変換則を評価することができる。この Hausdorff 公式は  $B$  の線形項をすべて含む表式となっている。また、リー微分  $\mathcal{L}_{A/2} \cdot B$  は  $[\frac{1}{2}A, B]$  として与えている。(2.85) の  $\coth$  はべき級数展開として定義しており、

$$c_n (\mathcal{L}_{A/2})^n \cdot B \equiv c_n \left[ \frac{A}{2}, \left[ \frac{A}{2}, \left[ \dots, \left[ \frac{A}{2}, B \right] \dots \right] \right] \right] \quad (2.86)$$

には、 $\frac{1}{2}A$  の  $n$  個の因子が現れる。結局、(2.85) を用いて (2.81) を評価すれば、微小ゲージ変換則が

$$\delta V = V' - V = i\mathcal{L}_{V/2} \cdot [(\Lambda + \Lambda^\dagger) + \coth(\mathcal{L}_{V/2}) \cdot (\Lambda - \Lambda^\dagger)] \quad (2.87)$$

となる。

超対称な場の強さ (2.56) は次のような非アーベル型の表式へと一般化される。

$$W_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} (e^{-V} D_\alpha e^V) \quad (2.88)$$

ここで、ベクトル超場  $V$  は、(2.82) のように、ゲージ群の随伴表現に対する生成子を使った行列である。非アーベル型のゲージ変換の下で、この場の強さが

$$W_\alpha \rightarrow W'_\alpha = e^{-i\Lambda} W_\alpha e^{i\Lambda} \quad (2.89)$$

のように変換することは容易に確かめられる。

スカラー、スピノール、ベクトル場の繰り込み可能なもっとも一般的な超対称ラグランジアンを書き下そう。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{16kg^2} \text{Tr}(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + \Phi^\dagger e^V \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ & + \left[ \left( \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right) \Big|_{\theta\theta} + \text{h.c.} \right] \end{aligned} \quad (2.90)$$

ゲージ不変であるためには、質量行列  $m_{ij}$  と結合定数  $g_{ijk}$  が、内部対称群に対して完全対称な不変テンソルとなることが要求される。 $V \rightarrow 2gV$  とすれば、ゲージ場の運動項における成分場の規格化をカノニカルなものにすることができる。

## 2.4 自発的対称性の破れ

超対称ゲージ理論が高エネルギー物理で実現されるためには、超対称性とゲージ対称性が自発的に破れている必要がある。一般的なゲージ対称性の破れはよく知られているが、超対称性の破れはさらに議論を要する。超対称代数 (2.1) のスピノールの足についてトレースをとることで次式が得られる。

$$H = \frac{1}{4}(\bar{Q}_1 Q_1 + Q_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 Q_2 + Q_2 \bar{Q}_2) \quad (2.91)$$

(2.91) から、任意の状態  $|\Psi\rangle$  に対して  $\langle\Psi|H|\Psi\rangle \geq 0$  であることがわかり、エネルギー密度が 0 になる状態が、理論の超対称な基底状態であることがわかる。 $H$  の期待値は負にならないため、この状態が基底状態であり、 $\langle 0|H|0\rangle = 0$  は  $Q|0\rangle = \bar{Q}|0\rangle = 0$  を意味しているので、超対称な基底状態となる。零エネルギーの基底状態は超対称性を保つ一方で、正エネルギーの基底状態は超対称性を自発的に破ることになる。

超対称性理論において自発的破れを引き起こす三つの模型について述べる。まず、カイラル超場で構成された超対称模型を考え、基底状態が超対称性を破ることを見る。(2.46) より、ポテンシャルエネルギーが  $\mathcal{V} = F_k^* F_k$  として与えられることを見た。ここで、 $F_k$  は

$$F_k^* = -(\lambda_k + m_{ik} A_i + g_{ijk} A_i A_j) \quad (2.92)$$

であった。 $F_k = 0$  となる  $A_i$  の真空期待値  $a_i$  があれば、超対称性を保つポテンシャルの最小値が存在することになる。超対称性を破るためには、方程式

$$0 = \lambda_k + m_{ik} a_i + g_{ijk} a_i a_j \quad (2.93)$$

が解  $a_i$  をもたないように、パラメータ  $\lambda_k, m_{ik}, g_{ijk}$  を選ばなければいけない。これは O'Raifeartaigh により構築された模型であり [3]、そこでは超対称性を破るためには 3 つの場が必要であることがわかっている。最も単純な模型は

$$\mathcal{L}_{\text{P.E.}} = \{[\lambda\Phi_0 + m\Phi_1\Phi_2 + g\Phi_0\Phi_1\Phi_1] + \text{h.c.}\} \quad (2.94)$$

で与えられる。

Fayet と Iliopoulos は、アーベル群をもつゲージ理論において、超対称性の自発的破れがどのように起こるのかについて示した。ベクトル超場の  $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$  成分は超対称不変かつゲージ不変である。ラグランジアン (2.77) にこの項を加えることで超対称性の自発的破れが起こることがわかる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4}(W^\alpha W_\alpha + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}) + \Phi_1^\dagger e^{eV} \Phi_1 + \Phi_2^\dagger e^{-eV} \Phi_2 \\ & + m(\Phi_1 \Phi_2 + \Phi_1^\dagger \Phi_2^\dagger) + 2\kappa V \end{aligned} \quad (2.95)$$

この模型では、ポテンシャルは

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}D^2 + F_1F_1^* + F_2F_2^* \quad (2.96)$$

で与えられ、 $D, F_1, F_2$  はオイラー方程式

$$\begin{aligned} D + \kappa + \frac{e}{2}(A_1^*A_1 - A_2^*A_2) &= 0 \\ F_1 + mA_2^* &= 0 \\ F_2 + mA_1^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

の解である。 $\mathcal{V} = 0$  を保つような (2.97) に対する解はなく、超対称性が自発的に破れるのである。

このポテンシャル (2.96) についてももう少し詳細に述べる。補助場に代入することでポテンシャル  $\mathcal{V}$  は

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{1}{2}\kappa^2 + \left(m^2 + \frac{1}{2}e\kappa\right) A_1^*A_1 + \left(m^2 - \frac{1}{2}e\kappa\right) A_2^*A_2 \\ &\quad + \frac{1}{8}e^2(A_1^*A_1 - A_2^*A_2)^2 \end{aligned} \quad (2.98)$$

となる。ここで  $m^2 > \frac{1}{2}e\kappa$  と  $m^2 < \frac{1}{2}e\kappa$  の2つの場合が考えられる。

$m^2 > \frac{1}{2}e\kappa$  の場合、 $A_1$  と  $A_2$  はともに実の質量をもつ。模型には2つの複素スカラー場があり、その質量はそれぞれ  $m_1^2 = m^2 + \frac{1}{2}e\kappa$ ,  $m_2^2 = m^2 - \frac{1}{2}e\kappa$  である。同様に、3つのスピノール場  $\psi_1, \psi_2, \lambda$  と、ベクトル場  $v_m$  が存在する。スピノール場とベクトル場の質量は対称性が破れても変わらない。特に、 $\lambda$  と  $v_m$  の質量は0、 $\psi$  は質量  $m$  のままである。また、 $m_1^2 + m_2^2 = m^2$  という等式が成り立っている。

ベクトル場  $v_m$  は破れていない  $U(1)$  群に対するゲージ場の役割を担い、 $\lambda$  は自発的超対称性の破れにより出現する Goldstone フェルミオンである。 $\lambda$  に対する変換則

$$\delta_\xi \lambda = i\xi D + \sigma^{mn} \xi v_{mn} \quad (2.99)$$

より、 $D$  が真空期待値をもつと  $\lambda$  は、

$$\delta_\xi \lambda = -i\xi \kappa + \dots \quad (2.100)$$

のように非斉次に変換する。これにより  $\lambda$  が Goldstone フェルミオンであると同定される。補助場がゼロでない真空期待値をもつと、超対称性の自発的破れが引き起こされることになる。

一方、 $m^2 < \frac{1}{2}e\kappa$  のとき、 $A_1 = A_2 = 0$  はもはやポテンシャル (2.46) を極小化しない。

最小値を見つけるためには、次の方程式の解かねばならない。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial A_1^*} &= \left(m^2 + \frac{1}{2}e\kappa\right) A_1 + \frac{e^2}{4}(A_1^* A_1 - A_2^* A_2) A_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial A_2^*} &= \left(m^2 - \frac{1}{2}e\kappa\right) A_2 - \frac{e^2}{4}(A_1^* A_1 - A_2^* A_2) A_2 = 0\end{aligned}\quad (2.101)$$

これは  $A_1 = 0, A_2 = u$  で最小値をとり、 $\frac{1}{4}e^2 u^2 + (m^2 - \frac{1}{2}e\kappa) = 0$  が成り立つ。ゲージ変換により、 $u$  は実数に選ぶことができる。ポテンシャルを最小値のまわりで展開すると、自発的に  $U(1)$  対称性が破れていることがわかる。 $A = A_1, \tilde{A} = A_2 - u$  とするとポテンシャルは次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{2m^2}{e^2}(e\kappa - m^2) + 2m^2 A^* A \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}e^2 u^2\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{A} + \tilde{A}^*]\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}e^2 u^2\right) v_m v^m + \dots\end{aligned}\quad (2.102)$$

第1項目の定数  $\frac{2m^2}{e^2}(e\kappa - m^2)$  は正の値をとり、超対称性とゲージ対称性はともに自発的に破れる。ベクトル場  $v_m$  は Goldstone ボソン場  $(\tilde{A} - \tilde{A}^*)/\sqrt{2}$  の自由度を加えて質量を獲得し、系の自由度の数は自発的破れが生じる前後で変化しない。対称性の破れはスピノール場の質量項にも修正を加える。

$$-m(\psi_1 \psi_2 + \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2) + \frac{ie u}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_2 \tilde{\lambda} - \psi_2 \tilde{\lambda})\quad (2.103)$$

次のようにスピノール場の線形結合をとれば、質量項を対角化できる。

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_2 \\ \tilde{\psi} &= \frac{1}{\sqrt{m^2 + \frac{1}{2}e^2 u^2}} \left(m\psi_1 + \frac{ie u}{\sqrt{2}}\lambda\right) \\ \tilde{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{m^2 + \frac{1}{2}e^2 u^2}} \left(m\lambda + \frac{ie u}{\sqrt{2}}\psi_1\right)\end{aligned}\quad (2.104)$$

対角化した質量項は

$$-\sqrt{m^2 + \frac{1}{2}e^2 u^2}(\psi \tilde{\psi} + \bar{\psi} \tilde{\bar{\psi}})\quad (2.105)$$

であり、Goldstone スピノール  $\tilde{\lambda}$  はゼロ質量のままとなる。 $\tilde{\lambda}$  の超対称変換は次のように非斉次で、Goldstone 場に対して予想された結果となる。

$$\delta_\xi \tilde{\lambda} = -2i \frac{m}{e} \xi \sqrt{e\kappa - m^2} + \dots\quad (2.106)$$

この模型は、質量  $\sqrt{m^2 + \frac{1}{2}e^2u^2}$  をもつ2つのスピノール場、質量が  $\sqrt{\frac{1}{2}e^2u^2}$  のベクトル場とスカラー場、質量  $\sqrt{2m^2}$  の複素スカラー場、ゼロ質量の Goldstone スピノールを記述する。ここで、自由度の数による質量2乗の合計が、ボソンとフェルミオンで等しくなることに注意する。

$$2 \cdot 2m^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}e^2u^2 = 4 \left( m^2 + \frac{1}{2}e^2u^2 \right) \quad (2.107)$$

この関係式は先程の  $U(1)$  対称な場合と同じである。実際、ボソンとフェルミオンの質量間にあるこのような関係式は超対称理論では常に成り立つことが知られている。

ここまで  $m^2 > \frac{1}{2}e\kappa$  の場合は超対称性のみが破れ、 $m^2 < \frac{1}{2}e\kappa$  の場合はゲージ対称性と超対称性の両方が破れるような模型について述べた。次に、ゲージ対称性のみが壊れる模型について、まずカイラル超場について見る。この場合、方程式 (2.93) に対して、内部対称群の下での不変性を破る解  $a_i$  を見つけなければならない。簡単な例として  $U(1)$  群を考え、3つのカイラル超場  $\Phi_+, \Phi_-, \Phi$  が正、負、中性の電荷をもつとする。次のラグランジアンは  $U(1)$  不変である。

$$\mathcal{L}_{\text{P.E.}} = \frac{1}{2}m\Phi^2 + \mu\Phi_+\Phi_- + \lambda\Phi + g\Phi\Phi_+\Phi_- + \text{h.c.} \quad (2.108)$$

方程式 (2.93) は

$$\begin{aligned} \lambda + ma + ga_+a_- &= 0 \\ a_-(\mu + ga) &= 0 \\ a_+(\mu + ga) &= 0 \end{aligned} \quad (2.109)$$

となる。これらは次の2つの解をもつ。

$$\begin{aligned} (1) \quad a_+ = a_- = 0, \quad a &= -\frac{\lambda}{m} \\ (2) \quad a_+a_- &= -\frac{1}{g} \left( \lambda - \frac{m\mu}{g} \right), \quad a = -\frac{\mu}{g} \end{aligned} \quad (2.110)$$

(1) の解は  $U(1)$  対称性を壊さないが、(2) の解は対称性を破る。(2) の解において積  $a_+a_-$  のみの値が決まるが、これは  $\mathcal{L}_{\text{P.E.}}$  が  $U(1)$  群だけでなく、複素化した  $U(1)$  群の下でも不変であることに起因している。(2.109) に対してある解  $a_+, a_-$  が見つければ、 $\lambda$  を任意の複素数として得られる  $e^\lambda a_+, e^{-\lambda} a_-$  が解の集合として存在している。当初の対称性から要求されるよりも、基底状態は大きく縮退したものになっているのである。

ラグランジアン (2.108) をゲージ化する場合、(2.95) のように  $\Phi_+$  と  $\Phi_-$  に結合したベクトル超場  $V$  を導入する必要がある。これによりスカラー場  $A_\pm$  とベクトル多重項  $V$  の三重線形性をみだす結合が生じる。

$$eV(A_+^*A_+ - A_-^*A_-) \quad (2.111)$$

対称性を破る解に対して、これは  $D$  項の一部となることがわかる。

$$eV \left[ a_+^* a_+ - a_-^* a_- + 2 \frac{\kappa}{e} \right] \quad (2.112)$$

通常、このような項は超対称性を破るのだが、 $a_{\pm} \rightarrow e^{\pm\lambda} a_{\pm}$  の変換により、いかなる  $\kappa$  に対してもこの項を消すことができる。よって、この模型では  $D$  項による超対称性の自発的破れは起こらない。

解 (2.110) に対して質量項は次のように与えられる。

$$\frac{1}{2} e^2 (a_+^* a_+ + a_-^* a_-) V^2 \quad (2.113)$$

これは変換により消すことはできず、ベクトル場  $v_m$  に質量を与える。(2.67) と (2.113) を比較すると、超対称性理論におけるゲージ対称性の自発的破れは、質量をもつベクトル多重項を生じさせることがわかる。これは Higgs-Kibble 機構の超対称性理論への拡張となっている。

これらの模型は簡単に非アーベル対称群に拡張できる。超対称性を保つ解は

$$F_k^* = -\lambda_k - m_{ik} a_i - g_{ijk} a_i a_j = 0 \quad (2.114)$$

を要求する。パラメータ  $\lambda$ ,  $m$ ,  $g$  は内部対称性によって制限される。ゲージ理論において、超対称性を保つ最小値は

$$D^\ell = a_i^\dagger T_{ik}^\ell a_k = 0 \quad (2.115)$$

も満たさなければならない。非アーベル型の超対称模型では、FI-D 項はゲージ不変ではないために含まれない。

重要な点は、非アーベル型の理論における超対称性の破れは (2.114) が決定するということである。つまり、もし (2.114) が解  $\hat{a}_i$  をもつのであれば、同様に (2.115) を満たす解  $\hat{a}_i$  も見つけることができる。これを半単純なゲージ群  $G$  の場合について見てみる。

はじめに、 $F_k^*(a_i) = 0$  を満たす解  $a_i$  があるとする。このとき

$$d^\ell = a_i^\dagger T_{ik}^\ell a_k \quad (2.116)$$

を計算することができる。ベクトル  $d^\ell$  は正則表現内で特定の方向を指定する。ある群要素が存在していて、このベクトルを、カルタン部分代数におけるベクトルのある線形和に変換することができる。方程式 (2.114) は  $G$  変換の下で不変であるので、このような変換は  $a_i$  を別の解  $\tilde{a}_i$  に回転させる。ベクトル  $d^\ell$  は、カルタン部分代数に非ゼロの値を取るような  $\tilde{d}^\ell$  に変換される。ここでカルタン部分代数の線形変換を行って、固有値  $m_i$  をもった 1 つの生成子が方向  $d^\ell$  によって定義されるようにできる。この基底の下で、 $\tilde{d}^\ell$  の中で非ゼロの値をもつ唯一の成分は

$$\tilde{d} = \tilde{a}_i^\dagger \mu_i \tilde{a}_i \quad (2.117)$$

となる。

また、方程式 (2.114) は、複素パラメータをもつゲージ変換の下でも不変である。スカラー場の複素共役表現が  $F^*$  に含まれないためである。ゆえに、方向  $\tilde{d}^\ell$  の変換を以下のように自由に行うことができる。

$$\hat{a}_i = \exp(\mu_i \eta) \tilde{a}_i \quad (2.118)$$

$\eta$  のどんな値に対しても、パラメータ  $\hat{a}_i$  は (2.114) の解となる。 $\eta$  を実にとることで

$$\hat{d} = \tilde{a}_i^\dagger \mu_i e^{2\mu_i \eta} \tilde{a}_i \quad (2.119)$$

が得られる。

ここで2つに場合分けする。まず、 $\tilde{a}_i \neq 0$  となる  $\mu_i$  が全て同符号である場合である。すべて正だとすれば、 $\eta \rightarrow -\infty$  のときに  $\hat{d} = 0$  となる。次に  $\mu_i$  が異なる符号をもつ場合であるが、このときも  $\hat{d} = 0$  となる  $\eta$  の値が存在する。特に、

$$\hat{d} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{a}_i^\dagger e^{2\mu_i \eta} \tilde{a}_i \quad (2.120)$$

であることに注意する。 $\tilde{a}_i^\dagger e^{2\mu_i \eta} \tilde{a}_i$  を  $\eta$  の関数として考えると、 $\eta \rightarrow \pm\infty$  のとき  $+\infty$  となる。それゆえに、 $\eta$  のある値において最小値をもつ。この点ではこの微分項は消え、 $\hat{d} = 0$  になる。よって、ゲージ群において、(2.114) の解  $\hat{a}_i$  があれば、(2.115) を満たす解  $\hat{a}_i$  を見つけられることが示せた。

ここまで非アーベル模型における超対称性の破れが F-項によって決定されることを見た。 $F_k^* = 0$  が解をもたない場合、またこの場合にのみ、超対称性は自発的に破れる。これは超対称性の破れにおける O'Raifeartaigh 機構とよばれている。



## 第3章

# 非線形シグマ模型

一般的に群  $G$  が部分群  $H$  に自発的に破れた場合、NG ボソンが自身や他の物質場とどのように相互作用しうるかを決める方法の一つとして非線形ラグランジアンを構成する方法がある。このラグランジアンにおいては、NG ボソン場の微分の次数が最も低い項は任意のパラメータなしに一意的に決まる。これは低エネルギー定理に対応している。本章ではまず商空間の一般的な構造および、NG ボソンの非線形表現についてレビューを行う [37]。そして非線形シグマ模型のラグランジアンに対してフェルミオン部分を加えることにより、超対称化を行い、ケーラー多様体の特性について述べる。

### 3.1 非線形表現

対称性が群  $G$  から部分群  $H$  に破れたときに、 $G$  の生成子  $T^A$  の全体を、破れていない生成子  $S^A \in \mathcal{H}$  と、破れた生成子  $X^a \in \mathcal{G} - \mathcal{H}$  に分離しておく。

$$\{T^A \in \mathcal{G}\} = \{S^A \in \mathcal{H}, X^a \in \mathcal{G} - \mathcal{H}\} \quad (3.1)$$

$$\text{tr}(S^a X^a) = 0 \quad (3.2)$$

ここで、 $T^A$ ,  $S^a$ ,  $X^a$  は最も簡単な基本表現における生成子の表現行列 (エルミート) とする。基本表現以外の表現  $\rho$  における表現行列は  $\rho(T^A)$ ,  $\rho(S^a)$  とかく。さらに規格化を

$$\text{tr}(S^\alpha S^\beta) = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta}, \quad \text{tr}(X^a X^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (3.3)$$

にとる。(3.2) の直交性は、

$$\begin{aligned} & \text{tr}(S^\alpha [S^\beta, X^a]) \\ &= \text{tr}(S^\alpha S^\beta X^a - S^\beta X^a S^\alpha) \\ &= \text{tr}(S^\alpha S^\beta - S^\beta S^\alpha) X^a \\ &= f^{\alpha\beta\gamma} \text{tr}(S^\gamma X^a) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

となるため、 $\text{tr}(S^\alpha[S^\beta, X^a]) = \text{tr}([S^\alpha, S^\beta]X^a) = 0$ を意味している。つまり、 $[S^\alpha, X^a] \in \mathcal{G} - \mathcal{H}$ である。破れた生成子同士の交換子  $[X^a, X^b]$  は一般的には破れていない生成子  $S^a$  と破れた生成子  $X^c$  の線形結合となるが、特に

$$[\mathcal{G} - \mathcal{H}, \mathcal{G} - \mathcal{H}] \subset \mathcal{H} \quad (3.5)$$

のように  $S^a$  だけでかける場合、商空間  $G/H$  は対称空間と呼ばれる。すなわちこれは  $G$  の生成子に以下のようにパリティ変換  $\tau$  を行っても代数が不変であるということである。

$$\begin{aligned} \tau: \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{G}, \quad \tau^2 = 1 \\ \begin{cases} \tau(Y) = +Y & Y \in \mathcal{H} \text{ のとき} \\ \tau(Y) = -Y & Y \in \mathcal{G} - \mathcal{H} \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

つまり、破れた生成子  $X^a$  には  $-$  の符号が、破れていない生成子には  $+$  の符号をもつパリティ量子数を付与できる場合に、商空間が対称空間となる。

出現する NG ボソンの数は  $G/H$  の次元  $\dim(G/H) = \dim G - \dim H$  に等しく、破れていない部分群  $H$  の下では線形に変換する。これは NG ボソン場  $\pi^a$  を商空間  $G/H$  の座標に同定するすべきことを示唆している。そこで、 $\xi(\pi)$  を商空間  $G/H$  の代表元として、次のように  $\pi^a$  でパラメタライズする。

$$\xi(\pi) = e^{i\pi(x)}, \quad \pi(x) \equiv \sum_{a \in \mathcal{G} - \mathcal{H}} \pi^a(x) X^a \quad (3.7)$$

この時点で NG 場は質量次元 0 の量であることに注意する。(3.7) に群  $G$  の元  $g$  をかけた  $g\xi(\pi)$  も  $G$  の元であるので、(3.7) の形の  $G/H$  の代表元  $\xi(\pi')$  と  $H$  の元  $\exists h$  との積に一意的に分解される。

$$g\xi(\pi) = \xi(\pi')h(\pi, g), \quad h(\pi, g) \in H \quad (3.8)$$

この元  $h$  は、 $g$  と同時に  $\pi(x)$  にもよることに注意する。ここで、NG 場の群  $G$  の大局的変換  $g \in G$  の下での変換則は

$$\xi(\pi) \longrightarrow \xi(\pi') = g\xi(\pi)h^{-1}(\pi, g), \quad g \in G \quad (3.9)$$

で定義する。この  $\pi(x)$  から  $\pi'(x)$  への  $G$  変換は、場  $\pi^a(x)$  に関して非線形な表現であるので、NG 場  $\pi(x)$  による群  $G$  の表現は、非線形表現とよばれる。

## 3.2 非線形シグマ模型と超対称性

非線形シグマ模型のラグランジアンは一般的に

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ab}(\varphi) \partial_\mu \varphi^a \partial^\mu \varphi^b \quad (3.10)$$

と表され、 $\varphi_a$  は  $G \rightarrow H$  の自発的破れに伴い出現する NG ボソン場であり、一般に商空間  $G/H$  の座標を与える。計量  $g_{ab}(\varphi)$  が  $G$  変換の下で不変であるということは、ラグランジアンが非線形変換の下で同じ計量関数  $g_{ab}$  をもって不変であることを意味する。

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = f_g(\varphi) \quad (3.11)$$

$$g_{ab}(\varphi)\partial_\mu\varphi^a\partial^\mu\varphi^b = g_{ab}(\varphi')\partial_\mu\varphi'^a\partial^\mu\varphi'^b \quad (3.12)$$

(3.10) のようなラグランジアンを考えると、計量がケーラーならばフェルミオン部分を加えて超対称化できることを見てみる。 $\mathcal{N} = 1$  カイラル超場は複素場であり

$$\phi(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{-i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu} \left( \varphi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x) \right) \quad (3.13)$$

のように与えられるから、 $\mathcal{N} = 1$  超対称ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\phi, \bar{\phi}) = g_{i\bar{j}}(\varphi, \varphi^*) \partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^{*\bar{j}} + (\text{fermion terms}) \quad (3.14)$$

のように書き下せる。ここでのポイントは計量が

$$g_{ij}(\varphi, \varphi^*) = g_{i\bar{j}}(\varphi, \varphi^*) = 0, \quad g_{i\bar{j}}(\varphi, \varphi^*) = \frac{\partial^2 K(\varphi, \varphi^*)}{\partial\varphi^i\partial\varphi^{*\bar{j}}} \quad (3.15)$$

となることである。複素場  $\varphi^i, \varphi^{*i}$  によってパラメタライズされたこのような多様体はケーラー多様体 (Kählerian) と呼ばれ、一般的に次のような特徴をもつ。

(I) 複素かつエルミート多様体である。

(II) 基本 2 形式  $\Omega \equiv \frac{i}{2}g_{i\bar{j}}d\varphi^i d\varphi^{*\bar{j}}$  が閉形式となる ( $d\Omega = 0$ )、もしくは成分場を用いて、

$$\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial\varphi^k} = \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial\varphi^i}, \quad \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial\varphi^{*k}} = \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial\varphi^{*j}} \quad (3.16)$$

となる。(これはエルミート計量  $g_{i\bar{j}}$  がケーラーポテンシャル  $K(\phi, \bar{\phi})$  を用いて (3.15) の形で書けることを意味する。)

超多重項のスカラー場で座標付けされる商多様体は複素的な性質が必要であり、ある複素群  $G^C$  と複素部分群  $\hat{H} \subset G^C$  を用いて  $G^C/\hat{H}$  と表される。この多様体  $G^C/\hat{H}$  は常にケーラーである。NG ボソンによって張られた多様体は実多様体  $G/H$  であるので、もし  $G/H \simeq G^C/\hat{H}$  なら ( $G/H$  がケーラーであるなら)、 $G/H$  非線形シグマ模型はフェルミオン部分を加えることのみで超対称化することができる。そして、もし  $G/H$  がケーラーでないなら、全てのボソンによって張られる多様体がケーラー多様体  $G^C/\hat{H}$  になるように超対称化するためには、適当なボソン場の集合を加えなければならない。ここで加えるボソンのように、本当の NG ボソンではないがケーラー多様体を張るために必要なボソンのことを擬 NG ボソンと呼ぶ。擬 NG ボソンの数は

$$N_q = 2 \times \dim_C(G^C/\hat{H}) - \dim(G/H) \quad (3.17)$$

で与えられ、因子 2 は  $G^C/\hat{H}$  を座標付けしている超場  $\phi$  が 2 つの実ボソンを含んでいることからきている。  $N_q = 0$  のときは、  $G/H \simeq G^C/\hat{H}$  となる。

## 第4章

# 超対称 $CP^{N-1}$ 模型

### 4.1 隠れた局所対称性とアノマリー

超対称  $CP^{N-1}$  模型におけるラグランジアンは次式で表される。

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K_0(\varphi, \varphi^\dagger) \quad (4.1)$$

ここで  $\varphi_i (i = 1, \dots, N-1)$  はカイラル超場、 $K_0(\varphi, \varphi^\dagger)$  はケーラーポテンシャルである。

$$K_0(\varphi, \varphi^\dagger) = \frac{1}{g^2} \ln \left( \frac{1}{g^2} + \varphi^\dagger \varphi \right) \quad (4.2)$$

よく知られているように、このケーラーポテンシャルは  $CP^{N-1}$  多様体上の Fubini-Study 計量を与え、 $CP^{N-1}$  多様体は複素場  $\varphi_i, \varphi_i^\dagger$  によってパラメタライズされる。 $g$  は質量の逆数次元をもつ結合定数である。ケーラーポテンシャル (4.2) を  $\varphi = 0$  のまわりで展開すると

$$K_0(\varphi, \varphi^\dagger) = \frac{1}{g^2} \ln \frac{1}{g^2} + \varphi^\dagger \varphi - \frac{g^2}{2} (\varphi^\dagger \varphi)^2 + \dots \quad (4.3)$$

となり、第1項はラグランジアンには影響せず、カイラル場  $\varphi$  が (4.2) によって正準規格化されていることが第2項よりわかる。

補助ベクトル超場  $V$  を導入して、ケーラーポテンシャルを次のように書き直す。

$$K'_0(\varphi, \varphi^\dagger, V) = e^{2V} \left( \frac{1}{g^2} + \varphi^\dagger \varphi \right) - \frac{2}{g^2} V \quad (4.4)$$

最後の項は FI-D 項である。 $V$ -変分から出る運動方程式より

$$\frac{\partial K'_0}{\partial V} = 2e^{2V} \left( \frac{1}{g^2} + \varphi^\dagger \varphi \right) - \frac{2}{g^2} = 0 \Leftrightarrow -2V = \ln \frac{1/g^2 + \varphi^\dagger \varphi}{1/g^2}$$

を得る。この  $V$  の表式を (4.4) に代入すると

$$\begin{aligned} K'_0 &= e^{-\ln \frac{1/g^2 + \varphi^\dagger \varphi}{1/g^2}} \left( \frac{1}{g^2} + \varphi^\dagger \varphi \right) - \frac{2}{g^2} \left( -\frac{1}{2} \ln \frac{1/g^2 + \varphi^\dagger \varphi}{1/g^2} \right) \\ &= \frac{1/g^2}{1/g^2 + \varphi^\dagger \varphi} \left( \frac{1}{g^2} + \varphi^\dagger \varphi \right) + \frac{1}{g^2} \ln \frac{1/g^2 + \varphi^\dagger \varphi}{1/g^2} \\ &= \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^2} \ln \left( \frac{1}{g^2} + \varphi^\dagger \varphi \right) - \frac{1}{g^2} \ln \frac{1}{g^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

となる。第1項と第3項はラグランジアンに影響しない定数項である。結果として、元の  $CP^{N-1}$  模型のケーラーポテンシャル (4.2) が得られることから、(4.2) が (4.4) のように書き換えられることがわかる。

(4.4) においてカイラル超場パラメータ  $\lambda$  を用いて変数変換

$$2V \rightarrow 2V - i(\lambda - \bar{\lambda}) \quad (4.6)$$

$$\varphi_i \rightarrow e^{i\lambda} \varphi_i \quad (4.7)$$

$$\bar{\varphi}_i \rightarrow e^{-i\bar{\lambda}} \bar{\varphi}_i \quad (4.8)$$

を行うことで、

$$\begin{aligned} K'_0 &\rightarrow e^{2V - i(\lambda - \bar{\lambda})} \left( \frac{1}{g^2} + e^{-i\bar{\lambda}} \varphi^\dagger e^{i\lambda} \varphi \right) - \frac{2}{g^2} \left( V - \frac{i}{2}(\lambda - \bar{\lambda}) \right) \\ &= \varphi_i^\dagger e^{2V} \varphi - \frac{2}{g^2} V + \frac{1}{g^2} e^{-i\lambda} e^{2V} e^{i\bar{\lambda}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

が得られる。ここで  $N$  番目のカイラル超場として  $(1/g)e^{-i\lambda} = \phi_N$  を導入すると、

$$K(\phi, \phi^\dagger, V) = \phi_i^\dagger e^{2V} \phi_i - \frac{2}{g^2} V \quad (4.10)$$

$$\phi_i = \varphi_i (i = 1, \dots, N-1), \quad \phi_N = \frac{1}{g} e^{-i\lambda} \quad (4.11)$$

となる。このケーラーポテンシャルは大局対称性  $SU(N)$  と局所対称性  $U(1)_{\text{local}}$  をもったゲージ化線形模型を与える。この  $U(1)_{\text{local}}$  は  $CP^{N-1}$  模型では見えていなかった局所対称性であるため、「隠れた局所対称性」ともよばれる。 $U(1)$  局所対称性においてゲージ固定条件を  $\phi_N = 1/g$  にとると、ケーラーポテンシャル (4.10) は (4.4) を再現し、補助場  $V$  を消去することで元のケーラーポテンシャル (4.2) になる。したがって、超対称  $CP^{N-1}$  模型はゲージ化された線形模型から得られることがわかる。

しかし、 $U(1)_{\text{local}}$  対称性にアノマリーが存在するため、これらの模型において等価性が保たれていないことに注意しなければならない。アノマリーを考慮するためには積分測度からの寄与を扱う必要がある。

## 4.2 Harada-Tsutsui の方法

ラグランジアン (4.2) はゲージ不変性をもたないのだが、[29] で述べられているアノマリーをもつゲージ理論の量子化の手順 (Harada-Tsutsui の方法) を適用することで、以下のように  $U(1)_{\text{local}}$  対称性のアノマリーを扱うことができる。

まず、補助ベクトル超場  $V$  を  $CP^{N-1}$  模型の分配関数に導入する。

$$\begin{aligned} Z &= \int d\varphi d\varphi^\dagger \exp\left(i \int d^8z K_0(\varphi, \varphi^\dagger)\right) \\ &= \int d\varphi d\varphi^\dagger dV \exp\left(i \int d^8z K'_0(\varphi, \varphi^\dagger, V)\right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

ここで、超空間座標は  $z = (x, \theta, \bar{\theta})$ 、積分測度は  $d^8z = d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}$  と定義している。一般的に、 $V$  積分は鞍点としての  $K_0$  だけではなく高次の量子補正項を導くが、超対称性理論では [38] で示されているように量子補正をもたず、この  $V$  積分の表式は厳密に成り立っている。

ゲージ固定条件  $f[V] = 0$  に対して Fadeev-Popov 行列式  $\Delta_f[V]$  を

$$\Delta_f[V] \int d\lambda d\bar{\lambda} \delta\left(f[V^{\lambda, \bar{\lambda}}]\right) = 1 \quad (4.13)$$

のように定義する。ここで、 $d\lambda d\bar{\lambda}$  はゲージ不変測度であり、 $V$  のゲージ変換は

$$2V^{(\lambda, \bar{\lambda})} = 2V + i(\lambda - \bar{\lambda}) \quad (4.14)$$

である。(4.13) を分配関数 (4.12) に挿入し積分変数の変数変換  $V \rightarrow V^{(-\lambda, -\bar{\lambda})}$  を行うことで、分配関数を  $\lambda, \bar{\lambda}$  と元の場合  $\varphi$  の汎関数積分を用いて表すことができる。

$$Z = \int d\varphi d\varphi^\dagger \mathcal{D}V d\lambda d\bar{\lambda} \exp\left(i \int d^8z K'(\varphi, \varphi^\dagger, \lambda, \bar{\lambda}, V)\right) \quad (4.15)$$

$$\mathcal{D}V \equiv dV \Delta_f[V] \delta(f[V]) \quad (4.16)$$

ここで  $dV$  はゲージ不変であると仮定しているので、 $\mathcal{D}V$  はゲージ体積によって割られたゲージ不変測度に対応している。ケーラーポテンシャル  $K'$  は

$$K'(\varphi, \varphi^\dagger, \lambda, \bar{\lambda}, V) = e^{2V} \left\{ \frac{1}{g^2} e^{i\bar{\lambda}} e^{-i\lambda} + (\varphi^\dagger e^{i\bar{\lambda}})(e^{-i\lambda} \varphi) \right\} - \frac{2}{g^2} V \quad (4.17)$$

である。

もし、積分変数としてカイラル超場  $\varphi' = e^{-i\lambda} \varphi$  をとるなら、汎関数測度は [39, 40] により与えられたヤコビアン因子を生じる。

$$\frac{\delta\varphi'_j(z)}{\delta\varphi_k(z')} = \delta_j^k e^{-i\lambda(z)} \frac{-\bar{D}^2}{4} \delta^8(z - z') \quad (4.18)$$

さらに  $\lambda$  から  $\phi_N = e^{-i\lambda}/g$  へと変数を変えることによって、 $\lambda$  はカイラル超場であるので (4.18) に類似の関係式

$$\frac{\delta\phi_N(z)}{\delta\lambda(z')} = -i\frac{1}{g}e^{-i\lambda(z)}\frac{-\bar{D}^2}{4}\delta^8(z-z') \quad (4.19)$$

が得られる。よって、新しい変数で積分された分配関数においては、因子  $N$  をもった Wess-Zumino 項をもつことがわかる。因子  $N$  は  $N-1$  個の  $\varphi_i$  と 1 個の  $\lambda$  の測度から生じたものである。

最終的に、 $CP^{N-1}$  模型の分配関数は次の通りに書き直される。

$$Z = \int d\phi d\phi^\dagger DV \exp\left(i \int d^8z K(\phi, \bar{\phi}, V) + i\alpha[V, \phi_N, \bar{\phi}_N]\right) \quad (4.20)$$

$$\alpha[V, \phi_N, \bar{\phi}_N] = -\frac{N}{16\pi^2} \int d^4x d^2\theta \log(g\phi_N) W^\alpha W_\alpha + \text{h.c.} + O(1/\Lambda^2) \quad (4.21)$$

ここで、ケーラーポテンシャルは (4.10) によって与えられ、 $\alpha[V, \phi_N, \bar{\phi}_N]$  はヤコビアン因子によって生じたアノマリー項である。 $\Lambda$  は汎関数測度を正規化するための紫外カットオフパラメータであり、その主要項から  $U(1)_{\text{local}}$  に対する Wess-Zumino 項が与えられる。カットオフ理論におけるアノマリー項の導出については、第 4.4 章で述べることにする。

結果として、超対称  $CP^{N-1}$  模型は、ケーラーポテンシャル (4.10) と  $F$  項 (4.21) によって与えられる理論と量子的に等価であることを示した。 $F$  項によってフレーバー対称性は  $SU(N)$  から  $SU(N-1)$  に小さくなるから、このゲージ化された線形模型の作用は  $SU(N-1) \times U(1)_{\text{local}}$  の対称性をもつことになる。

### 4.3 グローバル構造と非斉次座標

前節では、 $CP^{N-1}$  模型の作用 (4.2) から始まり、分配関数を線形模型 (4.20) として書き直してきた。作用 (4.2) では、 $\varphi_i$  は  $CP^{N-1}$  多様体の局所的なアフィン座標であるので、この座標で張られた領域は  $CP^{N-1}$  の全体を覆わない。

まず、作用が局所座標で表されているが、ケーラーポテンシャル (4.2) により得られる分配関数が多様体全体で定義されていることを確認する。簡単のために結合定数を 1 とする。 $\varphi_i$  はある座標近傍内の局所座標であり、この座標近傍を  $U_0$  により表すことにする。ある  $k$  に対して  $\varphi_k \neq 0$  のとき、座標変換によって座標近傍  $U_k$  にアフィン座標を導入することができる。

$$\varphi'_k = \frac{1}{\varphi_k}, \quad \varphi'_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_k} \quad (i \neq k) \quad (4.22)$$

ここで重要なのは、このようにつくった  $N$  個の座標近傍  $U_i (i = 0, \dots, N-1)$  によって  $CP^{N-1}$  多様体全体を覆うことができる点である。

座標変換 (4.22) のもとで、ケーラーポテンシャル (4.2) は

$$K_0(\varphi, \varphi^\dagger) = K_0(\varphi', \varphi'^\dagger) + f(\varphi') + f^*(\varphi'^*) \quad (4.23)$$

のように変換する。ここで  $f(\varphi) = -\log \varphi'_k$  は正則関数である。正則項と反正則項は超座標積分後の作用では消滅するので、作用は座標  $\varphi'_i$  に関して同じ表式で与えられる。つまり、もし測度が座標変換の下で不変であるならば、(4.2) によってえられる分配関数は  $CP^{N-1}$  多様体の全体で定義されるということである。

したがって、非線形シグマ模型は非斉次座標を使うことによって多様体全体で大域的に定義されることは明らかである。線形模型では、 $\phi_i (i = 1, \dots, N-1)$  が座標  $\varphi_i$  と関連し、 $\phi_N$  はゲージ変換パラメータ  $\lambda$  によって与えられていたことを思い出そう。(4.22) より、 $U_0$  から  $U_k$  に動くためには、超場を次のように変換すれば良いことがわかる。

$$\phi'_k = \frac{\phi_N^2}{\phi_k}, \quad \phi'_i = \frac{\phi_N \phi_i}{\phi_k} (i \neq k) \quad (4.24)$$

この変換の下で作用が不変であることは簡単に確認できる。結果として、線形模型もまた  $CP^{N-1}$  多様体の全体で定義されるのである。

ここで、 $\phi_N = e^{-i\lambda/g}$  が単なる余剰場 ([31] ではコンペンセイター場と呼ばれる) であり、 $CP^{N-1}$  の座標系においては無意味な (余分な、冗長な) ものであることに注意する。もし、分配関数 (4.20) にアノマリーがなければ、 $\phi_i (i = 1, \dots, N)$  は  $CP^{N-1}$  における斉次座標として解釈され、 $\phi_N = 0$  は  $CP^{N-1}$  では無限遠にある超平面になりうるが、我々が考える模型においてはアノマリー項 (4.21) の対数特異性により  $\phi_N$  は 0 になりえない。しかし、 $\phi_N \neq 0$  であることは問題にならず、模型は無限遠での超平面をちゃんと含むことができる。なぜなら、変換 (4.24) によって座標近傍を移り合うことができ、多様体の全体を含むことを可能にするからである。それどころか、座標変換 (4.24) は  $\phi_N = 0$  において成立していないことを注意しておく。

## 4.4 カットオフ理論におけるアノマリー項の導出

4次元における  $CP^{N-1}$  模型は繰り込み不可能であり、紫外カットオフをもった低エネルギー理論としてみなされる。よって、カットオフを有限に保ったまま、ゲージ化された線形模型におけるアノマリーの寄与を評価しなければならない。この節では、三角ダイアグラムを計算することでアノマリー項のカットオフ依存性について考える。

まず、真空汎関数

$$e^{i\Gamma[V]} = \int d\phi d\phi^\dagger \exp\left(i \int d^8z K(\phi, \bar{\phi}, V)\right) \quad (4.25)$$

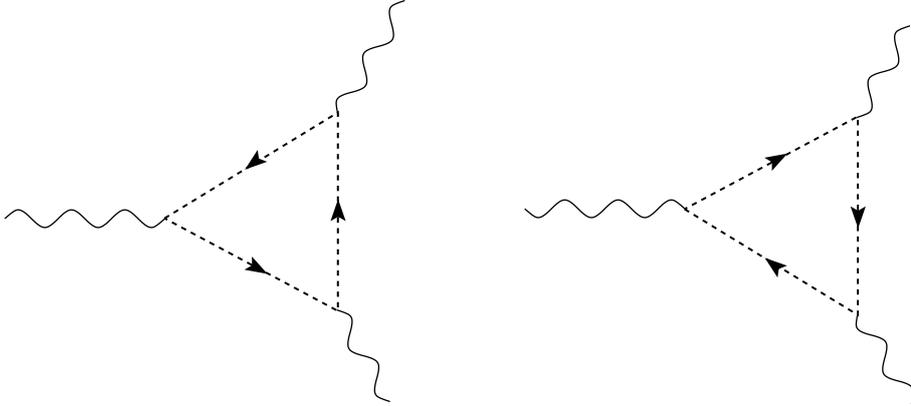


図 4.1 3点頂点関数に寄与する2つの三角ダイアグラム。破線はフェルミオンの伝搬関数を表し、2つのダイアグラムではループの向きが逆になっている。

を考える。 $U(1)_{\text{local}}$  がアノマリーをもつので、 $\Gamma[V]$  は三角ダイアグラムよりゲージ不変でなくなる。一方で、分配関数 (4.20) はゲージ不変であるので、 $\Gamma[V]$  のゲージ変化により生じるアノマリーは、 $\alpha[V, \phi_N, \bar{\phi}_N]$  のゲージ変換により相殺されるはずである。

$$\delta\alpha[V, \phi_N, \bar{\phi}_N] = -\delta\Gamma[V] \quad (4.26)$$

それゆえに、 $\alpha[V, \phi_N, \bar{\phi}_N]$  は  $\delta\Gamma[V]$  が与えられればこの方程式を解くことで決定される。

さて、カットオフ理論における  $\delta\Gamma[V]$  の計算について詳細に述べていこう。カイラルスピノール場に対するラグランジアンは次式で与えられる。

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta} \phi^\dagger e^{2V} \phi = i\bar{\Psi} \not{\partial} P_R \Psi + v_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu P_R \Psi + \dots \quad (4.27)$$

ここで、スピノール場は4成分表記を用いて表しており、 $v_\mu$  は  $V$  におけるベクトル成分場である。 $P_R$  は右巻きフェルミオン場への射影演算子  $P_R = (1 + \gamma_5)/2$  である。図 4.1 のように、2つの三角ダイアグラムが  $v_\mu$  の3点頂点関数に寄与する。結果として

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{(3)}(k_1, k_2) \equiv -N \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \left\{ \text{tr} \left[ \frac{1 + \gamma_5}{2} \frac{1}{-k - \not{a} \gamma^\mu} \frac{1}{-k - \not{a} + k_1} \gamma^\nu \frac{1}{-k - \not{a} - k_2} \gamma^\rho \right] \right. \\ \left. + \text{tr} \left[ \frac{1 + \gamma_5}{2} \frac{1}{-k + \not{a} \gamma^\rho} \frac{1}{-k + \not{a} + k_2} \gamma^\nu \frac{1}{-k + \not{a} - k_1} \gamma^\mu \right] \right\} \quad (4.28)$$

を得る。 $N$  因子は  $N$  成分フェルミオンから生みだされている。NJL 模型のようにこの積分は発散するため、Wick 回転ののちに紫外カットオフを導入するのだが、ここで導入するカットオフは (4.21) で用いられているカットオフパラメータ  $\Lambda$  とは別物であり、単純な関係式がないことに注意する。4次元ベクトル  $a^\mu$  は内線により運ばれる運動量の任意性のために導入されている。

より正確には、2つの三角ダイアグラムの各々に対して、内線の運動量をずらす自由度として2つの4次元ベクトル  $a^\mu, b^\mu$  を導入する（第2項の  $\not{a}$  を  $\not{b}$  に置き換えておくべき）。このとき、[35] で述べられているように  $a^\mu = -b^\mu$  にとることで3つのカレント全てにおいてノンカイラルなアノマリーを回避できる。実際に、電荷共役行列  $C$  を  $CC^{-1} = 1$  によってトレースにはさみ、 $C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T}$  を満たすことを使えば

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[ \frac{1}{\not{k} - \not{a}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - \not{a} + \not{k}_1} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - \not{a} - \not{k}_2} \gamma^\rho \right] \\ = -\text{tr} \left[ \frac{1}{\not{k} + \not{a}} \gamma^\rho \frac{1}{\not{k} + \not{a} + \not{k}_2} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{a} - \not{k}_1} \gamma^\mu \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

を得る。よって、(4.28) のように  $a^\mu = -b^\mu$  としておけば、1つのダイアグラムで運動量変数を  $k^\mu \rightarrow -k^\mu$  のように反転させると  $\gamma_5$  を含まないトレースは互いに相殺する。それゆえに、 $\gamma_5$  を含むトレースのみが残り、 $a^\mu = -b^\mu$  の選択が妥当であることがわかる。

さて、アノマリー項  $\delta\Gamma[V]$  を評価するが、これは(4.28)の発散のフーリエ変換に一致している。

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)^\nu \Gamma_{\mu\nu\rho}^{(3)}(k_1, k_2) \\ = 4N i \epsilon_{\nu\mu\lambda\rho} \int_{k^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{(k+a)^\nu k_2^\lambda}{(k+a)^2 (k+a+k_2)^2} - \frac{-(k+a)^\nu k_1^\lambda}{(k+a)^2 (k+a-k_1)^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

一般的に、単純な運動量カットオフはゲージ不変性を壊すことに注意しておく。これは、NJL 模型でベクトルメソンを扱う際に見られるようによく知られた問題である [8]。NJL 模型においては、ループ計算でのゲージ場の質量項のあいまいさを回避するために、ゲージ不変性をもつ頂点関数が用いられた。カットオフ理論においてゲージ不変性を扱うための手法は他にも多く提唱されている。ここでは、ゲージ不変性を確保するためにループ運動量シフトをどう選ぶかという任意性を用いている。他には、[41] のように高階微分運動項によってゲージ不変な方法で模型を定式化することもできる。いずれにせよ、定性的な特徴は変わらない。

上式の運動量積分は2つの添え字  $\nu, \lambda$  の反対称部分を拾うことで容易に計算できる。ファイマンパラメータ公式により分母をまとめ、付録の式を用いて  $k$  積分を行う。ミンコフスキー空間にもどすと、結果として生じる関数は

$$\begin{aligned} i(k_1 + k_2)^\nu \Gamma_{\mu\nu\rho}^{(3)}(k_1, k_2) \\ = -\frac{N}{8\pi^2} \epsilon_{\nu\mu\lambda\rho} \int_0^1 dx \left\{ a^\nu k_2^\lambda g(-(a+xk_2)^2, -a^2 - 2xa \cdot k_2 - xk_2^2) \right. \\ \left. + a^\nu k_1^\lambda g(-(a-xk_1)^2, -a^2 + 2xa \cdot k_1 - xk_1^2) \right\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

となる。ここで、 $g(p^2, m^2)$  は付録 A によって定義される。これはアノマリーと関係する3点頂点関数に対する、カットオフ理論における厳密な結果である。

$\mu, \rho$  方向のカレントが保存するならば、[35] で述べられているように  $a = k_1 - k_2$  に選ばなければならない。

$$i(k_1 + k_2)^\nu \Gamma_{\mu\nu\rho}^{(3)}(k_1, k_2) = -\frac{N}{4\pi^2} \epsilon_{\nu\mu\lambda\rho} k_1^\nu k_2^\lambda f(k_1, k_2) \quad (4.32)$$

$$f(k_1, k_2) = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left\{ g(-(k_1 - (1-x)k_2)^2, -k_1^2 + 2(1-x)k_1 \cdot k_2 - (1-x)k_2^2) \right. \\ \left. + g(-((1-x)k_1 - k_2)^2, -(1-x)k_1^2 + 2(1-x)k_1 \cdot k_2 - k_2^2) \right\} \quad (4.33)$$

この結果はカイラルカレント  $J^\mu \equiv \bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \psi = \bar{\Psi} \gamma^\mu P_R \Psi$  の観点で見ると次式になる。

$$\partial_\nu \langle J^\nu(x) \rangle = -\frac{N}{32\pi^2} \epsilon_{\nu\mu\lambda\rho} F^{\nu\mu} f \left( -i \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}, -i \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x} \right) F^{\lambda\rho} \quad (4.34)$$

関数  $f$  を  $1/\Lambda$  のべきで展開すると

$$\partial_\nu \langle J^\nu(x) \rangle = -\frac{N}{32\pi^2} \epsilon_{\nu\mu\lambda\rho} F^{\nu\mu} F^{\lambda\rho} + \frac{N}{96\pi^2 \Lambda^2} \epsilon_{\nu\mu\lambda\rho} F^{\nu\mu} \square F^{\lambda\rho} + O(1/\Lambda^4) \quad (4.35)$$

となり、第1項は従来のカイラルアノマリーに一致しており、計算の正しさをチェックできる。\*

演算子  $f$  が座標微分のみから成るので、超対称模型での  $\delta\Gamma[V]$  は容易に与えることができる。最終的に、 $\delta\Gamma[V]$  と (4.26) とから、超対称な Wess-Zumino 項は

$$\alpha[V, \phi_N, \bar{\phi}_N] \\ = -\frac{N}{16\pi^2} \int d^4x d^2\theta \log(g\phi_N) W^\alpha f \left( -i \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}, -i \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x} \right) W_\alpha + \text{h.c.} \quad (4.36)$$

のように得られ、 $\Lambda$  のすべてのオーダーを含んだ (4.21) の厳密な式となっている。

## 4.5 $1/N$ 展開における有効ポテンシャル

さて、 $CP^{N-1}$  模型を矛盾なく線形模型に定式化できたので、 $1/N$  展開でこの模型の有効ポテンシャルを解析していく。Wess-Zumino ゲージをとったときのスカラー成分は、ベクトル超場  $V$  の  $D$  項である  $-D$  と、 $\phi_N$  の最初のスカラー成分場である。[33] のように、 $V$  の  $D$  項においては符号を負 (Wess-Bagger とは逆) にとることにする。 $\phi_N$  の  $F$  項は  $1/N$  展開での主要項で有効ポテンシャルに関与しない。

\* [35] のセクション 22 によると、カットオフを有限に保つ限り、オーダー  $1/\Lambda^2$  の補正項がアノマリーの中出现する。( [35] では、 $\Lambda$  は大きな 3 次元球の半径  $P$  と表されている。) 藤川の方法 [39] を適応することでもまた、有限なカットオフの下で補正項がヤコビアン因子に出現することがわかる。一般にカットオフ理論で指数定理をどう扱うのか理解することは興味深いことであるが、この論文では本題とずれるため扱わないこととする。

1/N 展開を行うために、結合定数を

$$g^2 \equiv \frac{G}{N} \quad (4.37)$$

と定義し、 $G$  を固定して  $N$  が大きい極限をとる。この方法は、 $CP^{N-1}$  模型の解析ではよく用いられる極限である。さらに  $g\phi_N$  は、アノマリーが寄与する項が主要項になるためには、(対数関数として含まれるために)  $O(1)$  でなければならず、 $\phi_N$  の真空期待値を、 $z$  を複素定数として

$$\langle \phi_N \rangle \equiv \sqrt{N}z \quad (4.38)$$

ととることとする。

これらの成分場を (4.36) に挿入することで、有効作用へのアノマリーの寄与を計算できる。

$$\alpha[V, \phi_N, \bar{\phi}_N] = -\frac{N}{16\pi^2} \int d^4x \log(G|z|^2) Df \left( -i\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x}}, -i\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \right) D \quad (4.39)$$

定数  $D$  に作用すると演算子  $f$  が 1 になり、 $D$  の 2 次の項が有効ポテンシャルに生成されることがわかる。

定数  $W_\alpha$  に対して、他のダイアグラムから高次補正項が超ポテンシャルに次のような表式として出る可能性について考えてみよう。

$$\log(g\phi_N)\Lambda^3 F\left(\frac{W^\alpha W_\alpha}{\Lambda^3}\right) \quad (4.40)$$

ここで  $F(\dots)$  はある関数であり、超対称性と質量次元の勘定からこれが一般的なアノマリーの寄与となる。 $W^\alpha W_\alpha/\Lambda^3$  のべき級数展開を行うと、定数場は  $W^\alpha W_\alpha = \theta\theta D^2 + \dots$ 、および  $\log(g\phi_N) = \log(Gz) + \dots$  として含まれるので、2 次以上のべき乗は有効ポテンシャルに寄与しない。よって、(4.39) はアノマリーが寄与する有効ポテンシャルの厳密な表式である。

結果として、1/N 展開でのリーディングオーダーにおける有効ポテンシャルが次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}V(z, D) = & -\frac{1}{G}D + D|z|^2 + \frac{1}{16\pi^2}D^2 \log(G|z|^2) \\ & + \frac{1}{32\pi^2} \left[ \Lambda^4 \log\left(1 + \frac{D}{\Lambda^2}\right) - D^2 \log\left(1 + \frac{\Lambda^2}{D}\right) + D\Lambda^2 \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

ここで、1 項目と 2 項目は tree レベルの作用からきており、ここでも  $D$  項の符号は負であることに注意しておく。3 項目は (4.39) からのアノマリーが寄与するポテンシャルである。第 4 項は 1 ループ計算から生じており、論文 [33] の中で超対称 NJL 模型において計

算されたものと同じである。この計算では、 $D$  は  $\phi_i (i = 1, \dots, N-1)$  のスカラー成分に対する質量の二乗に対応するパラメータで、矛盾のない真空となっているためには  $D$  は正でなければならない。

$z$  に関する停留性条件は

$$\frac{\delta V}{\delta z} = \frac{D}{z} \left( \frac{1}{16\pi^2} D + |z|^2 \right) = 0 \quad (4.42)$$

となり、これより  $D = 0$  が導かれ、超対称性はリーディングオーダーでは破れないことがわかる。

$D$  に関する停留性条件

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{\delta D} &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{1}{G} + |z|^2 + \frac{1}{32\pi^2} \left[ 2\Lambda^2 - 2D \log \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{D} \right) + 4D \log (G|z|^2) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

に、 $D = 0$  を代入することで

$$|z|^2 = \frac{1}{G} - \frac{\Lambda^2}{16\pi^2} \quad (4.44)$$

を得る。もし、 $G > G_{\text{cr}} = 16\pi^2/\Lambda^2$  ならばこの模型は破綻してしまう。 $|z|$  は正でなければならないため、結合定数  $G$  が大きくなると (4.44) が成り立たず、停留性条件をみたす真空が存在しないからである。したがって、 $1/N$  リーディングオーダーでは、模型は弱結合領域  $G < G_{\text{cr}}$  でのみ安定な真空をもち、この真空では超対称性は破れないことがわかる。

ここで、アノマリーの寄与が超対称性の堅牢さに大きく影響していることを指摘しておく。もし、単純にアノマリー項のないゲージ化された線形模型を量子化するのであれば、 $z$  に関する停留性条件が (4.42) に代わり  $Dz^* = 0$  となり、 $D = 0$  または  $z = 0$  の条件を得る。 $D$  に関する停留性条件はギャップ方程式

$$|z|^2 - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 + D} \right) = \frac{1}{G} - \frac{1}{G_{\text{cr}}} \quad (4.45)$$

を意味しており、これはボゾン型の  $CP^{N-1}$  模型と同様である [36]。そこでは模型は次の2つの相に分かれていた。(I)  $G < G_{\text{cr}}$ ,  $|z| \neq 0$ ,  $D = 0$ , (II)  $G > G_{\text{cr}}$ ,  $|z| = 0$ ,  $D \neq 0$ 。(I) の相は上記で述べた超対称模型の弱結合相に対応しており、(II) の相は新しく出現した相である。もしアノマリーがないのであれば  $D$  が強結合領域で真空期待値を得ることで超対称性が自発的に破れたであろう。しかし、超対称模型ではこのような相は現れず、アノマリーが存在するために超対称性が保たれているのである。

$1/N$  リーディングオーダーで強結合領域においては真空はないが、非摂動効果や高次項を取り入れることで真空が見つかる可能性は残っていることをつけ加えておく。

## 4.6 動的ベクトル超多重項

前節では弱結合領域で  $z$  が真空期待値 (4.45) をもつことを示した。この真空では、アノマリー項 (4.46) がベクトル超場に対する運動項をもたらす。

$$-\frac{N}{16\pi^2} \int d^4x d^2\theta \log(\sqrt{G}z) W^\alpha f \left( -i \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}, -i \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x} \right) W_\alpha + \text{h.c.} \quad (4.46)$$

よく知られるように、一般的に、隠れた局所対称性をもつモデルではベクトルボソンが動的に生成される。このモデルでもまた、 $\phi$  の成分のループダイアグラムがベクトルボソンにおける運動項を生成する。加えてアノマリー項 (4.46) が運動項を与えるのだが、対数関数のために不適切な符号をもちうる。もし、対数関数が正であるならばアノマリー項は負の計量の出現を助長することになる。

$N$  が十分大きい枠組みでは、このような負計量が禁止されることを容易に確かめることができる。真空期待値 (4.44) において

$$G|z|^2 = 1 - \frac{G}{G_{\text{cr}}} < 1 \quad (G < G_{\text{cr}}) \quad (4.47)$$

を得る。それゆえに、 $G < G_{\text{cr}}$  において対数関数が負の符号になるため、ベクトル超場の運動項は良くふるまう。このとき、アノマリー項 (4.46) はベクトル場に対して次の頂点関数を導く。

$$\Gamma_{\mu\nu}^{A(2)}(p) = (p^2 \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \frac{N}{32\pi^2} \log \left( 1 - \frac{G}{G_{\text{cr}}} \right) f(p, -p) \quad (4.48)$$

$f(p, -p)$  は (4.33) から陽に評価することができ、 $p^2 > 0$  においては

$$f(p, -p) = \frac{1 + 7p^2/3\Lambda^2}{1 + 2p^2/\Lambda^2} \quad (4.49)$$

となることが計算によってわかる。

さて、時間的な運動量におけるベクトル場の 2 点頂点関数を計算する。カットオフをもったループ積分においても、第 4.4 章でのアノマリーの計算と同様に、内線の運動量をずらす自由度を適当に選べる。ここでは、運動量シフトを対称的に選ぶ ( $a^\mu = -p^\mu/2$ ) こととし、ベクトル成分における頂点関数  $\Gamma_{\mu\nu}^{\prime(2)}(p)$  が

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\prime(2)}(p) = \Gamma_{\mu\nu}^{\text{f}(2)}(p) + \Gamma_{\mu\nu}^{\text{b}(2)}(p) \quad (4.50)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\text{f}(2)}(p) = -N \int_0^1 dx \int_{k^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^4k}{2\pi^4} \frac{4k_\mu k_\nu - p_\mu p_\nu - 2(k^2 - p^2/4)\eta_{\mu\nu}}{\{k^2 + 2(1/2 - x)p \cdot k + p^2/4\}^2} \quad (4.51)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\text{b}(2)}(p) = N \int_0^1 dx \int_{k^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^4k}{2\pi^4} \frac{4k_\mu k_\nu - 2(k^2 - p^2/4)\eta_{\mu\nu}}{\{k^2 + 2(1/2 - x)p \cdot k + p^2/4\}^2} \quad (4.52)$$

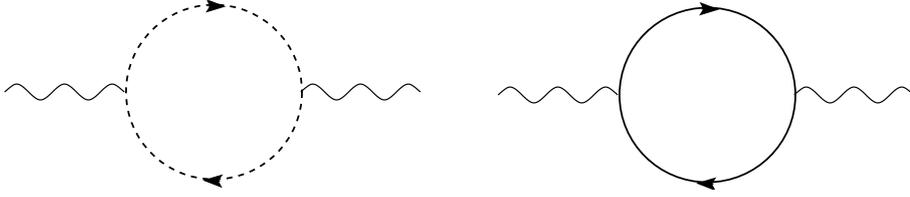


図 4.2 2点頂点関数に寄与する2つのダイアグラム。破線はフェルミオンの伝搬関数、実線はボソンの伝搬関数を表し、左図が  $\Gamma_{\mu\nu}^{f(2)}(p)$ 、右図が  $\Gamma_{\mu\nu}^{b(2)}(p)$  に対応する。

で与えられる。図 4.2 のように、 $\Gamma^f$  と  $\Gamma^b$  はそれぞれフェルミオンとボソンの 1 ループダイアグラムから生じている。付録の式を用いて  $k$  積分を行えば、それぞれの頂点関数が  $\Lambda$  の 2 次の項を含むことがわかる。これはベクトル自己エネルギーに一致していて、カットオフパラメータを導入することによりゲージ対称性が壊れていることを示している。しかしながら、合算された頂点関数では、 $\Lambda$  の 2 次の項が超対称性のために互いに相殺する。結果として頂点関数は通常のゲージ不変な形で表されることとなる。ミンコフスキー空間における  $0 < p^2 < 4\Lambda^2$  の領域では

$$\Gamma_{\mu\nu}^{(2)}(p) = -(p^2\eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \frac{N}{16\pi^2} \left( 1 + \log \frac{4\Lambda^2 - p^2}{4p^2} + i\pi \right) \quad (4.53)$$

となる。積分結果はユークリッド空間では実数として計算されるが、ミンコフスキー空間では対数関数により虚部が現れることがわかる。

これらの結果を tree レベルの項と合わせて、時間的な運動量領域における頂点関数の最終的な表式が以下のように得られる。

$$\Gamma_{\mu\nu}^{(2)}(p) = -(p^2\eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)F(p^2) + m^2\eta_{\mu\nu} \quad (4.54)$$

$$F(p^2) = \frac{N}{16\pi^2} \left\{ 1 + \log \frac{4 - p^2/\Lambda^2}{4p^2/\Lambda^2} - \frac{1 + 7p^2/3\Lambda^2}{2(1 + 2p^2/\Lambda^2)} \log \left( 1 - \frac{G}{G_{\text{cr}}} \right) \right\} + i \frac{N}{16\pi} \quad (4.55)$$

$$m^2 = N \left( \frac{2}{G} - \frac{2}{G_{\text{cr}}} \right) \quad (4.56)$$

この頂点関数により質量ベクトル粒子が動的に出現することが予想されるが、ゼロでない虚数部を含むため、このベクトル粒子“候補”は不安定である。実際に、ベクトル粒子は  $\phi$  のスカラー成分とスピノール成分と結合するが、 $1/N$  リーディングオーダーで質量をもたないため、ベクトル状態はこれらの質量がない粒子に崩壊することとなる。

最後に、スペクトル関数の観点から不安定なベクトル状態のふるまいを明らかにしておこう。ベクトル場の伝搬関数は頂点関数 (4.48) から以下のように導かれる。

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = i\Delta'(p) \left\{ \eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} F(p^2) \right\}, \quad \Delta'(p) = \frac{1/F(p^2)}{m^2/F(p^2) - p^2} \quad (4.57)$$

ここでは [8] のように  $F(p^2)$  が  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$  で発散する点は考えない。そうすれば、スペクトル関数  $\rho(\sigma^2)$  は  $\Delta'(p)$  の虚数部分で与えられ、このとき  $\Delta'(p)$  は  $\rho(\sigma^2)$  を用いて表すことができる。

$$\Delta'(p) = \int_0^{\Lambda^2} d\sigma^2 \frac{\rho(\sigma^2)}{\sigma^2 - p^2 - i\epsilon} \quad (4.58)$$

ここで [8] のように新しいカットオフを導入しているが、2つのカットオフの間に単純な関係式は成り立たない。(4.54) と (4.55) を使うことで、 $\rho(\sigma^2)$  を数値的に評価することができ、その結果を図 4.3 に示す。ここで、 $\rho(\sigma^2)$  は  $O(1/N)$  で与えられていることを注意しておく。

図 4.3 により、結合定数  $G \gtrsim 0.5G_{\text{cr}}$  において、 $\sigma^2 \lesssim \Lambda^2$  の領域にピークがあることがわかるが、ピーク幅が広く、 $0.7G_{\text{cr}} \gtrsim 0.5G_{\text{cr}}$  においてピークを見極めるは困難である。臨界結合定数付近においては、ピークの位置が  $\sigma^2 \sim 0$  に近づき、ピーク幅が小さくなる。

ピークの位置は  $\rho(\sigma^2)$  の結果を用いて数値的に解析できる。結果を図 4.4 に示す。結合定数  $G$  が  $G_{\text{cr}}$  に近づくにつれ、不安定なベクトル状態の“質量”が 0 に向かって減少していく。超対称性はこの真空中で破れていないので、ベクトル超多重項が  $G \gtrsim 0.7G_{\text{cr}}$  において動的に生成されるが、不安定である。

$G \rightarrow G_{\text{cr}}$  においてスペクトル関数がデルタ関数に急速に近づいていくことは非常に興味深い結果である ( $\rho(\sigma^2) \rightarrow Z\delta(\sigma^2)$ )。このふるまいは、臨界結合定数ではゼロ質量のベクトル超多重項が動的に生成され、 $U(1)$  ゲージ対称性が回復することを示唆している。しかし、残念なことに臨界点  $G = G_{\text{cr}}$  は  $|z|^2 = 0$  となり有効ポテンシャルが発散してしまうため  $1/N$  リーディングオーダーでは解析するのが難しくなっている。

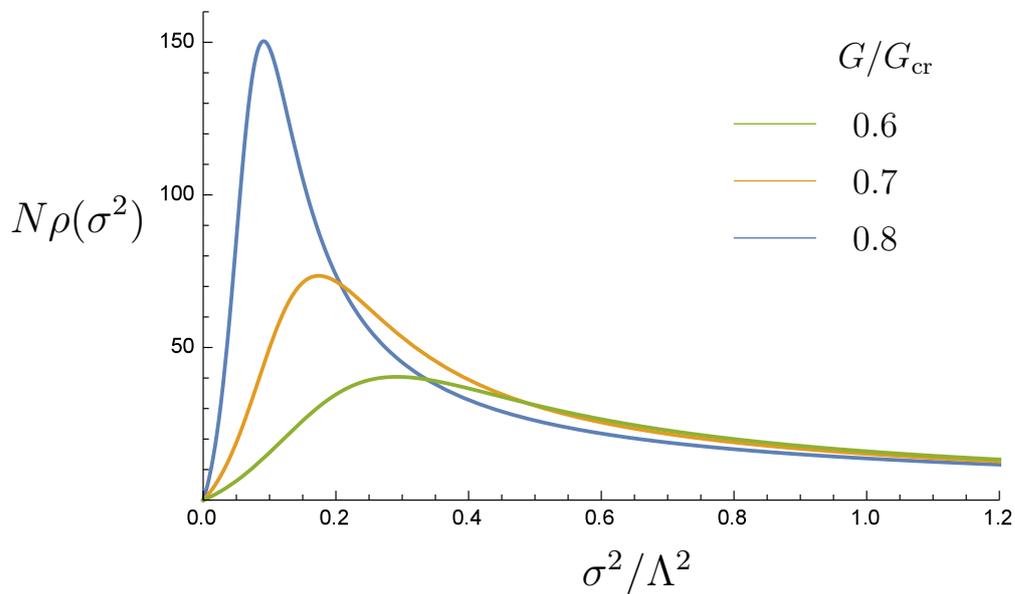


図 4.3 不安定ベクトル状態におけるスペクトル関数

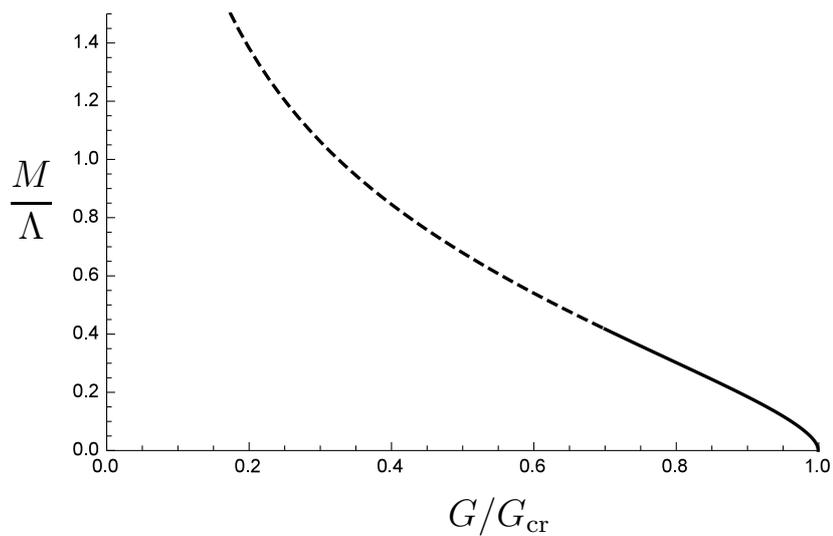


図 4.4  $\rho(\sigma^2)$  のピーク位置、 $\sigma = M$ 。不安定ベクトル多重項の質量に対応している。

## 第5章

# $F$ 項による拘束条件を課した非線形シグマ模型

### 5.1 $SO(N)/SO(N-2) \times U(1)$ 模型

$SO(N)/SO(N-2) \times U(1)$  多様体に基づいた超対称非線形シグマ模型を考える。この模型は  $CP^{N-1}$  模型と同様にゲージ化された線形模型として定式化できる。カイラル超場  $\phi_i (i = 1, \dots, N)$  を導入し、ケーラーポテンシャルは (4.10) と同じものをとる。さらに  $F$  項による条件を課すために、線形模型にカイラル超場  $\phi_0$  を導入する。この線形模型は次式のようなスーパーポテンシャルをもつ。

$$W_0(\phi_0, \phi) = \frac{1}{2} \phi_0 \phi^2 \quad (5.1)$$

カイラル超場  $\phi_0$  はラグランジュ乗数に対応しており、 $\phi_0$  の変分より  $\phi^2 = 0$  の拘束条件を得る。 $\phi$  と  $\phi_0$  は  $U(1)$  対称性に対して電荷  $+1$  と  $-2$  をもつものとする。

ここで、 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{N-1} + i\phi_N)$ 、 $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{N-1} - i\phi_N)$  を用いて、拘束条件を

$$\sum_{i=1}^N \phi_i^2 = \sum_{i=1}^{N-2} \phi_i^2 + 2xz = 0$$

と表す。これより

$$z = - \sum_{i=1}^{N-2} \phi_i^2 / 2x \quad (5.2)$$

が得られ、 $x \neq 0$  にゲージ固定したとき、 $\sum_{i=1}^{N-2} \phi_i^2$  を不変に保つ  $SO(N-2)$  変換と、 $z$  と  $\sum_{i=1}^{N-2} \phi_i^2$  を同位相で回転させる  $U(1)$  変換の下で不変であることがわかる。

非線形シグマ模型に戻すためには、 $U(1)$  対称性を  $\phi_N = 1/g$  にゲージ固定すればよいのだが、 $CP^{N-1}$  模型の場合と同様に、この書き換えもまたアノマリーの影響を受ける。

$\phi_0$  および  $\phi_i$  に対する総電荷が  $N - 2$  となるため、アノマリー項は以下のようになることがわかる。

$$\alpha[V, \phi_N, \bar{\phi}_N] = -\frac{N-2}{16\pi^2} \int d^4x d^2\theta \log(g\phi_N) W^\alpha f \left( -i \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x}}, -i \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \right) W_\alpha + \text{h.c.} \quad (5.3)$$

結果としてケーラーポテンシャルが  $SO(N) \times U(1)_{\text{local}}$  の対称性をもつ一方で、作用の対称性は  $SO(N-1) \times U(1)_{\text{local}}$  に縮小される。

背景場  $\langle \phi_0 \rangle = [w, 0, h]$  において、(5.1) から得られたラグランジアンの一部は成分場  $\phi^i = [A^i, \psi^i, F^i]$  によって展開される。

$$\int d^2\theta W(\phi_0, \phi) + \text{h.c.} = w F^i A^i + \frac{1}{2} h A^i A^i - w \psi^i \psi^i + \text{h.c.} \quad (5.4)$$

運動方程式  $F^{i*} + w A^i = 0$  より補助場  $F_i$  を消去すると、(5.4) は成分場に対する質量項を生成する。ケーラーポテンシャルからの寄与を含めることで、この背景場における質量項は

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -(D + |w|^2) A^{i\dagger} A^i + \left( \frac{1}{2} h A^i A^i - \psi^i \psi^i + \text{h.c.} \right) \quad (5.5)$$

として得られる。

## 5.2 $F$ 項を含めた有効ポテンシャル

質量項 (5.5) は [33] で解析されている SNJL 模型の質量項と基本的に一致している。スカラーに対しては、二乗質量の固有値は  $D + |w|^2 \pm |h|$  により与えられる。[33] での結果を用いると、この模型における  $1/N$  のリーディングオーダーでの有効ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} V(z, D, w, h) = & -\frac{1}{g^2} D + N(D + |w|^2 - |h| \cos \theta) |z|^2 + \frac{1}{16\pi^2} D^2 \log(G|z|^2) \\ & + \frac{1}{16\pi^2} \{ F(D + |w|^2 + |h|) + F(D + |w|^2 - |h|) - 2F(|w|^2) \} \end{aligned} \quad (5.6)$$

となる。ここで  $\theta$  は  $h A^i A^i$  の位相であり、 $F(x)$  は次式で定義される。

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[ \log(1+x) - x^2 \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) + x \right] \quad (5.7)$$

簡単のためカットオフ  $\Lambda$  を 1 とする。ポテンシャル (5.6) は  $h, w \rightarrow 0$  の極限をとると (4.41) と同様の表現に帰着することがわかる。ここでアノマリー項の因子  $N - 2$  を  $N$  が大きいとして  $N$  と近似していることに注意しておく。

(5.6) の停留性条件より、次のような結果が得られる。

$$\frac{\delta V}{\delta \theta} = 0 \Rightarrow |h||z|^2 \sin \theta = 0 \quad (5.8)$$

$$\frac{\delta V}{\delta |h|} = 0 \Rightarrow I(D + |w|^2 + |h|) - I(D + |w|^2 - |h|) = 16\pi^2 |z|^2 \cos \theta \quad (5.9)$$

$$\frac{\delta V}{\delta w} = 0 \Rightarrow w^* \left\{ I(D + |w|^2 + |h|) + I(D + |w|^2 - |h|) \right\} = -16\pi^2 w^* |z|^2 \quad (5.10)$$

$$\frac{\delta V}{\delta z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{z} \left( \frac{1}{16\pi^2} D^2 + (D - |h| \cos \theta) |z|^2 \right) = 0 \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{\delta D} = 0 \Rightarrow & -\frac{1}{G} + |z|^2 + \frac{1}{8\pi^2} D \log(G|z|^2) \\ & + \frac{1}{16\pi^2} \left\{ I(D + |w|^2 + |h|) + I(D + |w|^2 - |h|) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

ここで  $I(x)$  は次式で定義されている。

$$I(x) \equiv F'(x) = 1 - x \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \quad (5.13)$$

停留性条件 (5.8) から、 $\theta = 0$  または  $\pi$ 、もしくは  $|h| = 0$  を得る。ここで、ポテンシャルが  $\log |z|$  を含んでいるため  $|z| = 0$  は解にならない。 $I(x)$  は単調減少関数であるので、 $|h| \neq 0$  のとき、

$$I(D + |w|^2 + |h|) - I(D + |w|^2 - |h|) < 0 \quad (5.14)$$

となる。よって (5.9) より、 $|h| \neq 0$  ならば  $\theta = \pi$  であるが、これらの値は (5.12) を満たさないため、 $|h| = 0$  であることがわかる。さらに (5.9)、(5.11) より、 $\theta = \pi/2$  かつ  $D = 0$  がいえる。よって、停留性条件の結果として  $D = 0$  かつ  $|h| = 0$  が得られたこの段階で、超対称性が破れないことが結論される。

$w \neq 0$  のとき、(5.10) と (5.12) から

$$-\frac{1}{G} + \frac{1}{8\pi^2} D \log(G|z|^2) = 0 \quad (5.15)$$

となるが、これは  $D = 0$  に矛盾するので  $w = 0$  である。

結局、 $D$ ,  $h$ ,  $w = 0$  となり  $|z|$  は (4.44) と同じ表式によって与えられることがわかる。この真空では、有効作用は  $1/N$  リーディングオーダーでの  $CP^{N-1}$  模型と本質的には同じである。それゆえにベクトルボソンの解析もまた同様であり、有質量ベクトル粒子が出現するが質量をもたない成分に崩壊することとなる。



## 第 6 章

# 超対称 NJL 模型と隠れた局所 $U(1)$ 対称性

### 6.1 隠れた対称性のアノマリーと Wess-Zumino 項

まず、[33] で議論されている質量をもたない超対称 NJL 模型について考える。作用は

$$S[\Phi, \bar{\Phi}] = \int d^4x d^4\theta \left( \bar{\Phi}\Phi - \frac{G}{2N} (\bar{\Phi}\Phi)^2 \right) \quad (6.1)$$

で与えられる。ここで  $\Phi$  はフレーバー対称性  $SU(N)$  の基本表現に属するカイラル超場であり、 $G$  は 4-超場相互作用の結合定数である。この模型について、紫外切断  $\Lambda$  をもったカットオフ理論として解析を行う。

[33] によると、補助超場を導入することで作用を書き直すことができる。

$$S[\phi, \bar{\phi}, \Sigma, \bar{\Sigma}, V] = \int d^4x d^4\theta \left( \bar{\phi}_i e^{2V} \phi^i + \frac{N}{2G} (\bar{\Sigma} e^{2V} \Sigma - 1)^2 \right) \quad (6.2)$$

ここで  $\phi^i$  と  $\Sigma$  はカイラル超場、 $V$  は補助ベクトル超場、そしてフレーバー指数  $i$  は 1 から  $N$  まではしる。この作用は  $SU(N)_{\text{global}}$  と  $U(1)_{\text{local}}$  のもとで不変である。 $U(1)_{\text{local}}$  ゲージ変換は、 $\lambda$  をゲージ変換のカイラル超場パラメータとして

$$\begin{cases} \phi^i & \rightarrow (\phi^\lambda)^i = e^{-i\lambda} \phi^i \\ \bar{\phi}_i & \rightarrow (\bar{\phi}^{\bar{\lambda}})_i = e^{i\lambda} \bar{\phi}_i \\ \Sigma & \rightarrow \Sigma^\lambda = e^{-i\lambda} \Sigma \\ \bar{\Sigma} & \rightarrow \bar{\Sigma}^{\bar{\lambda}} = e^{i\lambda} \bar{\Sigma} \\ 2V & \rightarrow 2V^{(\lambda, \bar{\lambda})} = 2V + i(\lambda - \bar{\lambda}) \end{cases} \quad (6.3)$$

で与えられる。

[33] では、もし  $U(1)_{\text{local}}$  対称性を軸性ゲージ  $\Sigma = 1$  にとると、運動方程式より  $e^{2V} \rightarrow 1 + U$  となり、作用 (6.2) は元の作用 (6.1) に書き直されることが示されている。よって元の作用は逆変換を行うことで (6.2) として書き直すことができる。このゲージ化された模型 (6.2) では、ゲージ固定条件を Wess-Zumino ゲージにとることで、有効ポテンシャルをラージ  $N$  展開で比較的簡単に計算することができる。このように、[33] での解析は  $U(1)_{\text{local}}$  ゲージ対称性をうまく利用しているのである。

さて、ここで  $\phi$  と  $\bar{\phi}$  を経路積分することにより、以下のような真空汎関数  $\Gamma[\Sigma, \bar{\Sigma}, V]$  を定義しよう。

$$e^{i\Gamma[\Sigma, \bar{\Sigma}, V]} = \int d\phi d\bar{\phi} \exp(iS[\phi, \bar{\phi}, \Sigma, \bar{\Sigma}, V]) \quad (6.4)$$

ここでカイラル超場  $\phi^i$  と  $\Sigma$  が同じ電荷をもつため、隠れた局所対称性  $U(1)_{\text{local}}$  がアノマリーをもつことに注意する。 $\phi^i$  のカイラルフェルミオン  $\chi^i$  のゲージ変換は

$$\chi^i \rightarrow \chi'^i = e^{-i\varepsilon} \chi^i \quad (6.5)$$

である。三角ダイアグラムから、真空汎関数はこの微小ゲージ変換によって次のように変換することがわかる。

$$\delta\Gamma[\Sigma, \bar{\Sigma}, V] = -\frac{N}{16\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} + O(1/\Lambda^2) \quad (6.6)$$

ここで、 $F_{\mu\nu}$  は  $V$  のベクトル成分に対する場の強さである。超対称ゲージ変換 (6.3) を考えれば、この変換則は

$$\delta\Gamma[\Sigma, \bar{\Sigma}, V] = -\frac{N}{16\pi^2} \int d^4x d^4\theta i\lambda W^\alpha W_\alpha + \text{h.c.} + O(1/\Lambda^2) \quad (6.7)$$

のように拡張される。ここで、 $W_\alpha = -(1/4)\bar{D}^2 D_\alpha V$  である。重要な点は、このアノマリーが  $N$  のオーダーで  $U(1)_{\text{local}}$  対称性を破っており、この模型ではゲージ固定条件を軸性ゲージから Wess-Zumino ゲージに変更することができない点である。

(6.1) と (6.2) の作用の等価性を保証するためには、

$$\Gamma'[\Sigma, \bar{\Sigma}, V] = -\frac{N}{16\pi^2} \int d^4x d^2\theta (\ln \Sigma) W^\alpha W_\alpha + \text{h.c.} + O(1/\Lambda^2) \quad (6.8)$$

を加えることで、アノマリー項を相殺する必要がある。カットオフに関するリーディング項は、アノマリーをもつ対称性に対する Wess-Zumino 項以外の何物でもない。 $U(1)_{\text{local}}$  電荷をもつカイラル超場として  $\Sigma$  をとれば、軸性ゲージ  $\Sigma = 1$  において消えることを要請することでこの項の形が完全に決定される。

ここで、有効作用を定義するために  $\Sigma$  と  $\bar{\Sigma}$  を積分すると、これらのカイラル超場もまたアノマリーに寄与するので、因子  $N$  は  $N + 1$  に変わる。しかし、この違いはラージ  $N$  展開では  $N + 1 \simeq N$  となるので無視できる。

## 6.2 Wess-Zumino 項の導出

Wess-Zumino 項の構成に関して、アノマリー相殺のみをみたせば良いのならば、 $\Sigma$  の代わりにまったく別の超場をとることもできるため、この Wess-Zumino 項の導入は人為的に見えるかもしれない。本節では、Wess-Zumino 項が作用 (6.1) の経路積分による量子化から一意的に得られることを示す。

元の作用 (6.1) はゲージ不変でないのだが、ここでの量子化もまた第 4.2 章に述べたようにアノマリーをもつゲージ理論の量子化 [29] と基本的に同じ考え方で実行できる。まず、[33] のようにガウス積分によって補助ベクトル超場  $U$  を導入し、作用 (6.1) を書き直す。

$$S = \int d^4x d^4\theta \left( \bar{\Phi}\Phi(1+U) + \frac{N}{2G}U^2 \right) \quad (6.9)$$

書き換え  $U \rightarrow V = (1/2)\ln(U+1)$  によって、作用は

$$S = \int d^4x d^4\theta \left( \bar{\phi}_i e^{2V} \phi^i + \frac{N}{2G}(e^{2V}-1)^2 \right) \quad (6.10)$$

となる。ここでカイラル超場を  $\Phi$  から  $\phi$  に書き換えている。この作用は  $S[\phi, \bar{\phi}, 1, 1, V]$  に等しく、作用を (6.2) を軸性ゲージに固定した作用と同じである。つまり、CDFK 模型における分配関数は次のように表せる。

$$Z = \int d\phi d\bar{\phi} dV \exp(iS[\phi, \bar{\phi}, 1, 1, V]) \quad (6.11)$$

この段階ではまだゲージ変換は行っておらず、アノマリーの影響を受けていない。

ここで、ゲージ固定条件  $f[V] = 0$  に対する Fadeev-Popov 行列式  $\Delta_f[V]$  を導入しよう。

$$\Delta_f[V] \int d\lambda d\bar{\lambda} \delta(f[V^{(\lambda, \bar{\lambda})}]) = 1 \quad (6.12)$$

$V^{(\lambda, \bar{\lambda})}$  は (6.3) で定義された  $V$  のゲージ変換であり、 $d\lambda d\bar{\lambda}$  はゲージ不変測度である。

(6.12) を (6.11) に挿入し、積分変数を  $V \rightarrow V^{(-\lambda, -\bar{\lambda})}$  と変換すると、分配関数 (6.11) は次のように書きなおされる。

$$Z = \int d\phi d\bar{\phi} DV d\lambda d\bar{\lambda} \exp(iS[\phi^\lambda, \bar{\phi}^{\bar{\lambda}}, e^{-i\lambda}, e^{i\bar{\lambda}}, V]) \quad (6.13)$$

$$DV \equiv dV \Delta_f[V] \delta(f[V])$$

ここで  $dV$  はゲージ不変であると仮定する。カイラル超場  $\phi^\lambda$  と  $\bar{\phi}^{\bar{\lambda}}$  を積分変数とすれば、次のように積分測度からアノマリーが生じる [39, 40]。

$$d\phi d\bar{\phi} = d\phi^\lambda d\bar{\phi}^{\bar{\lambda}} e^{i\alpha[V, -\lambda, -\bar{\lambda}]} \quad (6.14)$$

$$\alpha[V, \lambda, \bar{\lambda}] = -\frac{N}{16\pi^2} \int d^4x d^4\theta i\lambda W^\alpha W_\alpha + \text{h.c.} + O(1/\Lambda'^2) \quad (6.15)$$

汎関数測度を正則化するために紫外カットオフ  $\Lambda'$  を導入している。  $\Sigma = e^{-i\lambda}$  とかくことで、分配関数は

$$Z = \int d\phi d\bar{\phi} DV d\lambda d\bar{\lambda} \exp\left(iS[\phi, \bar{\phi}, \Sigma, \bar{\Sigma}, V] + i\alpha[V, -i\ln\Sigma, i\ln\bar{\Sigma}]\right) \quad (6.16)$$

となる。つまり、CDFK 模型は Wess-Zumino 項  $\alpha[V, \dots]$  をもった作用 (6.2) によって与えられる理論と等価であり、これはリーディングオーダーで (6.8) に一致している。

ここで 2 つのケースの違いについてコメントする。まず、 $\Lambda'$  と  $\Lambda$  は同一ではなく、 $\Lambda$  はカットオフ理論としてこの模型に導入している。しかし、物理学的には紫外発散を正則化するという同じ役割を持っており、量子異常の項は正則化に依存しない。次に、2 つ目の分配関数では、 $\Sigma$  と  $\bar{\Sigma}$  の代わりに  $\lambda$  と  $\bar{\lambda}$  で積分を行っている。測度  $d\lambda, d\bar{\lambda}$  がゲージ不変である一方で、 $\Sigma, \bar{\Sigma}$  は  $U(1)$  電荷をもつため測度  $d\Sigma, d\bar{\Sigma}$  はアノマリーの影響を受ける。結果として、積分変数を  $\lambda$  から  $\Sigma$  に変えるなら、ヤコビアン因子からアノマリー項が生じ、 $\alpha$  の因子  $N$  を  $N+1$  に変える。しかし、これはラージ  $N$  近似において無視できる寄与である。

### 6.3 アノマリーの高次補正

カットオフ理論としての我々の模型においては、有効作用におけるアノマリー項が運動量積分から  $O(1/\Lambda^2)$  の寄与を受ける。ワインバーグの教科書 [35] によると、三角ダイアグラムによるアノマリーは次式のユークリッド運動量積分を評価することで得られる\*。

$$I_{\kappa\lambda}(k, c, d) \equiv \int_{|p|\leq\Lambda} d^4p [f_{\kappa\lambda}(p+k, c, d) - f_{\kappa\lambda}(p, c, d)] \quad (6.17)$$

$$f_{\kappa\lambda}(p, c, d) \equiv \frac{(p+c)_\kappa(p+d)_\lambda}{(p+c)^2(p+d)^2} \quad (6.18)$$

ここで、 $f_{\kappa\lambda}(p+k, c, d)$  は  $k$  のべき展開を行うことによって、

$$I_{\kappa\lambda}(k, c, d) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} k^{\mu_1} \dots k^{\mu_n} \int_{|p|\leq\Lambda} d^4p \frac{\partial^n f_{\kappa\lambda}(p, c, d)}{\partial p^{\mu_1} \dots \partial p^{\mu_n}} \quad (6.19)$$

\* [35] ではカットオフ  $\Lambda$  は  $P$  で書かれている

と表せる。 $f$  の  $n$  回微分の積分は  $O(\Lambda^{2-n})$  としてふるまう。よって、もしオーダー  $\Lambda^{-2}$  まで計算するなら、 $n = 1, 2, 3, 4$  の項まで計算する必要がある。

次に、ガウスの定理により、それぞれの積分を半径  $\Lambda$  の 3 次元球面の表面積分として書き直す。そして  $c$  と  $d$  のべきで展開することにより球対称な形で表面積分を評価することができる。表面積分の母関数を考えると

$$\int_{p^2=\Lambda^2} \frac{e^{t \cdot p}}{(p^2)^\alpha} \frac{1}{|p|} d^3 S = \frac{4\pi}{(\Lambda^2)^{\alpha-1}} \frac{\pi}{|t|\Lambda} I_1(|t|\Lambda) \quad (6.20)$$

のように計算できる。ここで  $I_n(x)$  は第一種のベッセル関数である。この母関数を  $t$  で微分して  $t \rightarrow 0$  の極限をとれば、様々な表面積分の表式を得られる。

$I_{\kappa\lambda}$  を Mathematica を用いて計算すると、次式が得られる<sup>†</sup>。

$$\begin{aligned} I_{\kappa\lambda}(k, c, d) = & \frac{\pi^2}{6} [2k_\lambda c_\kappa + 2k_\kappa d_\lambda - k_\lambda d_\kappa - k_\kappa c_\lambda - \eta_{\kappa\lambda} k \cdot (k + c + d) + k_\kappa k_\lambda] \\ & + \frac{\pi^2}{12\Lambda^2} \left[ 2c \cdot k c_\kappa c_\lambda - 2c \cdot k c_\kappa d_\lambda - 2c \cdot k c_\lambda d_\kappa + 2c \cdot k d_\lambda d_\kappa \right. \\ & + 2d \cdot k c_\kappa c_\lambda - 2d \cdot k c_\lambda d_\kappa - 2d \cdot k c_\kappa d_\lambda + 2d \cdot k d_\lambda d_\kappa \\ & + 2k \cdot k c_\kappa c_\lambda - 2k \cdot k c_\lambda d_\kappa - 2k \cdot k c_\kappa d_\lambda + 2k \cdot k d_\lambda d_\kappa \\ & + c \cdot c k_\kappa c_\lambda - c \cdot c k_\kappa d_\lambda - 2c \cdot d k_\kappa c_\lambda \\ & + 2c \cdot d k_\kappa d_\lambda + d \cdot d k_\kappa c_\lambda - d \cdot d k_\kappa d_\lambda \\ & - c \cdot c k_\lambda c_\kappa + c \cdot c k_\lambda d_\kappa + 2c \cdot d k_\lambda c_\kappa \\ & - 2c \cdot d k_\lambda d_\kappa - d \cdot d k_\lambda c_\kappa + d \cdot d k_\lambda d_\kappa \\ & + \eta_{\kappa\lambda} (c \cdot c c \cdot k - 2c \cdot d c \cdot k + c \cdot k d \cdot d + c \cdot c d \cdot k \\ & - 2c \cdot d d \cdot k + d \cdot d d \cdot k + c \cdot c k \cdot k \\ & \left. - 2c \cdot d k \cdot k + d \cdot d k \cdot k) \right] + O(1/\Lambda^4) \quad (6.21) \end{aligned}$$

最後に、[35] に従って (6.21) を用いることによって、(6.5) におけるアノマリーの高次補正項が得られる。

$$\delta\Gamma[\Sigma, \bar{\Sigma}, V] = -\frac{N}{16\pi^2} \int d^4 x \varepsilon \left[ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} + \frac{1}{3\Lambda^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} \square F_{\rho\sigma} + O(1/\Lambda^4) \right] \quad (6.22)$$

$F_{\mu\nu} \tilde{F}^\mu{}_\rho F^{\nu\rho}$  のようなオーダー  $\Lambda^{-2}$  の補正が四角ダイアグラムからでるかもしれないが、そのような項は  $U(1)$  の場合では恒等的に 0 になることに注意する。従って、Wess-Zumino 項 (6.8) は次のような超対称高次項をもつことになる。

$$\Gamma'[\Sigma, \bar{\Sigma}, V] = -\frac{N}{16\pi^2} \int d^4 x d^2 \theta (\ln \Sigma) \left[ W^\alpha W_\alpha + \frac{1}{3\Lambda^2} W^\alpha \square W_\alpha + O(1/\Lambda^4) \right] + \text{h.c.} \quad (6.23)$$

<sup>†</sup>  $O(\Lambda^0)$  の最後の項は [35] では欠けていることに注意。

ここで、スーパーポテンシャルのみが、隠れた  $U(1)_{\text{local}}$  のアノマリーによって変更されることに注意する。直接計算によりオーダー  $\Lambda^{-2}$  の項まで変更を確認した。これは経路積分の測度変換から簡単に理解できる。[39] のように、超対称理論におけるヤコビアン因子はカイラルオペレーターの超トレースを用いることによって評価できる。したがって、隠れた対称性のアノマリーはスーパーポテンシャルのみに生じ、ケーラーポテンシャルには影響しないのである。

## 6.4 アノマリー項のスーパーポテンシャルへの効果

$1/N$  リーディングオーダーにおけるこの模型の有効ポテンシャルを考察する。Wess-Zumino ゲージにゲージ固定すると、スカラー成分場はベクトル超場  $V$  の  $D$  項  $-D$ 、カイラル超場  $\Sigma$  の第1成分  $z$ 、そして  $F$  項  $h$  となる。[33] のように、 $V$  の  $D$  項の符号は負にとることにする。

これらの成分場を (6.23) に代入すると、アノマリー項の有効作用への寄与として

$$\Gamma' = -\frac{N}{16\pi^2} \int d^4x \ln |z|^2 \left( D^2 + \frac{1}{3} D \square D \right) + O(1/\Lambda^4) \quad (6.24)$$

を得る。 $D$  が定数ならば第2項は0になる。ここで、第4.5章で、 $W$  の2次以上のべきが有効作用に寄与しないことを思い出すと、(6.24) の最初の項がアノマリーをもつ有効作用の厳密な形となることがわかる。

$1/N$  リーディングオーダーにおける有効ポテンシャルは、[33] で計算された結果にアノマリーの寄与を加えることで得られる。

$$GV(z, h, D) = \frac{G}{32\pi^2} \left[ \Lambda^4 \ln \left( 1 + \frac{D}{\Lambda^2} \right) - D^2 \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{D} \right) + D\Lambda^2 + 2D^2 \ln |z|^2 \right] \\ + (1 - 2|z|^2)|h|^2 + (|z|^2 - 1)|z|^2 D \quad (6.25)$$

$h$  に関する停留性条件は [33] と同じであり、それゆえ  $h = 0$  もしくは  $|z|^2 = 1/2$  を得る。他の停留性条件は

$$\frac{\delta V}{\delta z} = 0 \Rightarrow \frac{G}{16\pi^2} D^2 - 2|z|^2 |h|^2 + (2|z|^2 - 1)|z|^2 D = 0 \quad (6.26)$$

$$\frac{\delta V}{\delta D} = 0 \Rightarrow \frac{G}{32\pi^2} \left[ 2\Lambda^2 - 2D \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{D} \right) + 4D \ln |z|^2 \right] = (1 - |z|^2)|z|^2 \quad (6.27)$$

となり、[33] の解析と同様に、極限  $G = 0$  では  $|z|^2 = 1$ 、 $h = D = 0$  となる。そして  $G$  が大きくなるにつれ、 $|z|^2$  は1から小さな値になっていく。 $1/2 < |z|^2 \leq 1$  の間は  $h$  は0に留まるので、(6.26) から

$$D = 0 \quad \text{or} \quad D = -\frac{16\pi^2}{G} (2|z|^2 - 1)|z|^2 \quad (6.28)$$

であることがわかる。 $D$  は  $\phi^i$  のスカラー成分の二乗質量であるため [33]、正でなければならず、 $1/2 < |z|^2 \leq 1$  において  $D$  は 0 となる。

$1/2 < |z|^2 \leq 1$  において (6.27) に  $D = 0$  を代入すると

$$\frac{G}{32\pi^2} 2\Lambda^2 = (1 - |z|^2)|z|^2 \quad (6.29)$$

となり、この式によって与えられた結合定数  $G$  に対して  $|z|^2$  の値が決まる。この式はアノマリーの影響を受けないため [33] と同じ結果である。よって、[33] の場合と同様に、 $G$  が臨界値  $G_{\text{cr}}^0 = 4\pi^2/\Lambda^2$  に近づくと  $|z|^2$  は  $1/2$  に近づいていく。

さらに、 $G$  が臨界値よりも大きくなると、 $|z|^2$  が  $1/2$  にとどまり、(6.27) より  $D$  の真空期待値を決定する表式

$$\frac{D}{\Lambda^2} \ln \left( 4 + \frac{4\Lambda^2}{D} \right) = 1 - \frac{G_{\text{cr}}^0}{G} \quad (6.30)$$

を得る。この方程式はアノマリーの寄与により [33] の結果から変更を受けていることに注意する。強結合領域においては  $|h|$  もまた真空期待値をもつ。(6.26) より

$$|h|^2 = \frac{G}{16\pi^2} D^2 \quad (6.31)$$

となり、(6.30) により与えられた  $D$  における  $h$  の値が求まる。この  $h$  の真空期待値はアノマリーを考慮した解析の特徴である。強結合領域では  $D$  と  $h$  が 0 でない値をもつため超対称性は動的に破れると結論される。

ここで [33] の解析で述べられている負計量粒子について考える。ラグランジアン

$$\int d^4\theta (\bar{\Sigma} e^{2V} \Sigma - 1)^2 = -2(2|z|^2 - 1) D_\mu x^* D^\mu z \dots$$

において  $|z|^2 = 1/2$  のとき、右辺第 1 項が 0 になるので、展開すると負計量が出現する。これは  $z$  のみに依存しており、 $h$  には依らない。負計量が出現しないためには  $2|z|^2 - 1 > 0$  である必要がある。つまり、本研究ではアノマリーがケーラーポテンシャルに影響しないので、[33] で議論された“負計量の起源”、スカラー場の運動項の符号が負となる点は改善されない。したがって [33] と同様に、強結合領域においては負計量粒子が出現し、そこで理論は破綻している。

## 6.5 質量項を加えた超対称 NJL 模型

ここでは、作用 (6.1) に次の質量項  $S_{\text{mass}}$  を加えた模型の考察を行う。

$$S_{\text{mass}} = \int d^4x d^4\theta m \Phi \Phi + \text{h.c.} \quad (6.32)$$

[33] の解析に従って、 $D$ ,  $h$ ,  $z$  に代わる新たな変数として

$$D, \quad H = 2|h||z|^{-3}, \quad Z = |z|^2 \quad (6.33)$$

を導入する。これらの変数を用いて、 $1/N$  のリーディングオーダーにおける有効ポテンシャルは

$$GV(Z, H, D) = \frac{G}{32\pi^2} \left[ F\left(D + \frac{m^2}{Z^2} + mH\right) + F\left(D + \frac{m^2}{Z^2} - mH\right) - 2F\left(\frac{m^2}{Z^2}\right) + 2D^2 \ln Z \right] - \frac{1}{4}(2Z - 1)H^2Z^3 + (Z - 1)ZD \quad (6.34)$$

で与えられる。関数  $F(x)$  は [33] で定義されているものと同じである。

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[ \ln(1+x) - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \right] \quad (6.35)$$

ここで、[33] と同様に簡単のため  $\Lambda = 1$  としている。ポテンシャルの  $\ln Z$  の項が Wess-Zumino 項から生じた項である。

質量項をもつ場合においても Wess-Zumino 項はケーラーポテンシャルに影響しないので、[33] と同様、模型は

$$1/2 < Z \leq 1 \quad (6.36)$$

の領域においてのみ負計量が存在しない理論として成り立つ。

停留性条件  $\delta V/\delta H = 0$  は [33] で与えられた式と同じであるため、[33] と同じ結果となることに注意する。すなわち、 $z$  が健全な領域では  $H$  は必ず 0 になる。それゆえに、もし病的でない領域に解析を制限するのであれば、ほかの停留性条件は

$$\frac{\delta V}{\delta D} = 0 \Rightarrow 2I\left(D + \frac{m^2}{Z^2}\right) + 4D \ln Z - \frac{32\pi^2}{G}Z(1-Z) = 0 \quad (6.37)$$

$$\frac{\delta V}{\delta Z} = 0 \Rightarrow \left[ 2I\left(D + \frac{m^2}{Z^2}\right) - 2I\left(\frac{m^2}{Z^2}\right) \right] (-2m^2Z^{-3}) + 2D^2Z^{-1} - \frac{32\pi^2}{G}(1-2Z)D = 0 \quad (6.38)$$

となる。  $I(x)$  も [33] で定義されているものと同じ関数である。

$$I(x) = 1 - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (6.39)$$

Wess-Zumino 項が (6.37) に  $\ln Z$  の項を引き起こすので、[33] のように停留点の評価を解析的に行うことが難しい。代わりに数値的に停留点の評価することとした。まず、(6.38) の左辺で  $D$  について微分を行うと、健全な領域で左辺は単調増加であることは簡

単にわかり、 $D > 0$  においては正の値をとる。そのとき、 $D = 0$  は  $Z$  の値に関係なく (6.38) の解であるので、健全な領域では  $D$  が 0 であることが言える。 $D = 0$  を (6.37) に代入することで、 $Z$  の真空期待値が決まる。それゆえ、質量項があっても健全な領域において超対称性が破れないことがわかる。

また、質量がない場合と同様、臨界結合定数は Wess-Zumino 項に依存しない。臨界結合定数  $G_{\text{cr}}^m$  は (6.37) において  $D = 0$ 、 $Z = 1/2$  とおくことで得られる。

$$G_{\text{cr}}^m = 4\pi^2/I(m^2/4) \quad (6.40)$$

これは [33] で得られた結合定数と同じ結果である。Wess-Zumino 項は超対称性が破れない強結合領域の真空期待値 ( $D \neq 0$  かつ  $H \neq 0$ ) には影響するが、この領域では負計量粒子の存在のために模型は破綻している。



## 第7章

# 結論と議論

この論文では、超対称非線形シグマ模型の定式化における、隠れた局所対称性をもつアノマリーを考慮した有効ポテンシャルの解析についてまとめた。従来、超対称非線形シグマ模型は補助場の方法を用いることにより、線形化されたゲージ理論として定式化されることが知られていた。しかし、我々はゲージ化された線形模型において、元の非線形シグマ模型に存在しなかった隠れた局所対称性がアノマリーをもつことを指摘し、[31]でいうところのコンペンセイターが関わる Wess-Zumino 項を精密に導出し、解析を行い、アノマリーが引き起こす有効ポテンシャルへの影響を明らかにした。

まず、 $\mathcal{N} = 1$  超対称性理論における一般的な構造についてまとめた。超対称性をもつ場の理論を記述するために、時空座標をグラスマン座標まで拡張し、ボソンとフェルミオンをひとまとめに扱う超場 (多重項) を導入し、超対称ラグランジアンを構成するために必要な既約表現としてのカイラル超場とベクトル超場について述べた。カイラル超場は  $\bar{D}_\alpha \Phi = 0$  を満たす超場であり、カイラル多重項の  $F$  成分は超対称変換で全微分の形になる。このことから、時空積分を行うことで表面項となり、 $F$  成分の積分は超対称変換の下での不変量を与える。ベクトル超場は、 $V = V^\dagger$  を満たす超場であり、同様に  $D$  成分の変換が全微分になり、その積分は超対称変換の下で不変量を与える。ベクトル超場の成分場に対する超変換 (2.54) を用いると成分場  $(C, \chi, M, N)$  が 0 になるようなゲージ固定が可能である。このゲージを Wess-Zumino ゲージと呼び、Wess-Zumino ゲージにとることにより、ベクトル場をよく知られた形の超対称 Yang-Mills 理論として定式化することができた。そして、これらのカイラル多重項とベクトル多重項とが相互作用する超対称ラグランジアン (2.90) を書き下した。さらに第 2.4 章では自発的に超対称性を破る模型として、カイラル超場で構成される O’Raifeartaigh 模型、アーベル群をもつゲージ理論の Fayet-Iliopolous 模型を紹介した。

第 4 章、第 5 章では、超対称  $CP^{N-1}$  模型および  $SO(N)/SO(N-1) \times U(1)$  模型について、アノマリーをもつゲージ理論として定式化を行った。アノマリー項によ

り、ゲージ化された線形模型は通常の定式化で得られる模型よりも作用の対称性が小さくなることが分かった。つまり、 $CP^{N-1}$  模型では  $SU(N-1)_{\text{global}} \times U(1)_{\text{local}}$  が、 $SO(N)/SO(N-2)_{\text{global}} \times U(1)_{\text{local}}$  では  $SO(N-1)_{\text{global}} \times U(1)_{\text{local}}$  の対称性が残る。 $1/N$  リーディングオーダーでは、線形模型は  $G < G_{\text{cr}}$  の弱結合領域で真空をもち、 $U(1)$  対称性は破れるが、超対称性は破れない。一方、 $1/N$  リーディングオーダーで、 $G > G_{\text{cr}}$  の強結合領域においては、安定な真空をもたないことが両模型の特徴である。

スペクトル関数の解析から、動的に生成されたゲージボソンが臨界結合定数でゼロ質量になって出現し、 $U(1)$  対称性が回復する可能性について議論した。対称性が回復しているかどうかを明らかにするためには、 $1/N$  展開の主要項を超えた解析が必要となる。特に、強結合領域における超対称性の破れについて明らかにすることが非常に興味深い問題として残されている。

[38] では、アノマリーが考慮されていなかったものの、エルミート対称空間におけるすべての超対称非線形シグマ模型がゲージ理論として定式化できることが述べられている。我々は、エルミート対称空間における2つの模型を扱い、定式化された模型においてアノマリーが考慮される必要があることを示した。ここで、他のエルミート対称空間において模型を解析する際にアノマリーが影響するのかについて述べておく。

グラスマン多様体  $G_{M,N}$  の場合、線形模型は  $U(N)_L \times U(M)_R$  の表現  $(N, \bar{M})$  のカイラル超場によって記述され、模型は  $F$  項による拘束を受けていない。線形模型では  $U(M)_R$  がゲージ化され、基本表現  $M$  はアノマリーをもつため、 $G_{M,N}$  非線形シグマ模型にはアノマリー項が加えられるべきである。

$Sp(N)/U(N)$  と  $SO(2N)/U(N)$  には、 $G_{M,N}$  と同じカイラル超場  $\phi$  と、 $F$  項拘束条件を課す付加的なカイラル超場  $\phi_0$  がある。ゲージ対称性は非アーベル型であるが、 $U(N)$  の部分群である  $U(1)_D$  を考えることによって、この場合でもアノマリー項が必要になることが簡単にわかる [23]。  $U(1)_D$  に対して、 $\phi$  と  $\phi_0$  はそれぞれ 1 と  $-2$  の電荷をもつ。総電荷を考えると、 $U(1)_D$  におけるアノマリーの因子として  $Sp(N)/U(N)$  では  $N(N+1)$ 、 $SO(2N)/U(N)$  では  $N(N-1)$  が与えられる。これらの因子は 0 ではないので、これらのターゲット多様体における線形模型についてもアノマリーを考慮すべきであることがわかる。

同様に、 $U(1)_D$  電荷を考えることで、 $E_6/SO(10) \times U(1)$  と  $E_7/E_6 \times U(1)$  について考察できる。 $E_6/SO(10) \times U(1)$  の場合、 $E_6$  の 27 表現のカイラル超場が 2 つあり、1 と  $-2$  の電荷をもつため、アノマリーの考慮が必要である。 $E_7/E_6 \times U(1)$  の場合、 $E_7$  の 56 表現のカイラル超場が 2 つあり、1 と  $-3$  の電荷をもつためこの場合もアノマリーを考慮しなければならない。結局、ターゲット多様体がエルミート対称空間にあるような非線形シグマ模型に対応している線形模型はすべて、アノマリーを考慮した量子化を行う必要があることがわかるのである。

第6章では Cheng, Dai, Faisei, Kong によって提唱されたある種の超対称 NJL 模型について述べた [42, 32]。この模型は超対称  $CP^{N-1}$  模型のケーラーポテンシャル (4.2) で高次の項を落とすことにより与えられる。この模型の解析は、[33] において補助ベクトル超場を導入し、 $1/N$  リーディングオーダーで有効ポテンシャルを計算することで解析がなされていた。補助ベクトル超場に関して、 $CP^{N-1}$  模型同様、模型は隠れた局所対称性にアノマリーをもち、このことを考慮した量子化を行うべきであることを述べた。しかしながら、アノマリー項は [33] での結果に定性的な影響を与えないことが明らかになった。

最後に、本文で論じたアノマリーを考慮した超対称非線形シグマ模型の解析法を適用することで、超対称性非線形シグマ模型における双対性が見いだせる可能性について指摘しておく。超対称  $CP^{N-1}$  非線形シグマ模型のケーラーポテンシャルは

$$K_0(\varphi, \varphi^\dagger) = \frac{1}{g^2} \log \left( \frac{1}{g^2} + \varphi^\dagger \varphi \right) \quad (7.1)$$

で与えられ、 $\varphi$  は  $N-1$  個の成分  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, N-1$ ) をもつのであった。 $CP^{N-1}$  は  $SU(N)/S[U(N-1) \times U(1)]$  の商空間構造をもち、この  $U(1)$  を隠れた局所対称性とみなして線形模型への書き換えを行ったのであった。実は、もう一方の  $U(N-1)$  を隠れた局所対称性とみなして  $CP^{N-1}$  模型を定式化できることが知られている [22]。

まず、ケーラーポテンシャル (7.1) を次のように書き直してみる。

$$K_0(\varphi, \varphi^\dagger) = \frac{1}{g^2} \text{tr} \log \Phi^\dagger \Phi, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1/g & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/g & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/g \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_{N-1} \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

実際、

$$(\Phi^\dagger \Phi)_{ij} = \frac{1}{g^2} \delta_{ij} + \varphi_i^* \varphi_j, \quad \det \Phi^\dagger \Phi = \frac{1}{g^{2(N-2)}} \left( \frac{1}{g^2} + \varphi^\dagger \varphi \right) \quad (7.3)$$

が成り立ち、 $\text{tr} \log = \log \det$  を用いれば、(関係のない定数項を除いて) この変形が正しいことを示せる。ここで、 $\Phi$  の右側から作用するゲージ群  $U(N-1)$  を導入しよう。

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi g, \quad g \in U^C(N-1) \quad (7.4)$$

超対称性のために複素化された群  $U^C(N-1)$  となる。この変換で  $\Phi$  は

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \varphi^T \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

のように、 $\mathbf{1}_{N-1}$  に比例していた部分を任意の  $N-1 \times N-1$  行列値のカイラル超場に移せる。 $U(N-1)$  ゲージ変換で不変なケーラーポテンシャルとして次のようなケーラー

ポテンシャルが考えられる。

$$K(\Phi, \Phi^\dagger, V) = \text{tr}(\Phi^\dagger \Phi e^{-V}) + \frac{1}{g^2} \text{tr} V \quad (7.6)$$

ゲージ変換は

$$\Phi \rightarrow \Phi e^{i\Lambda}, \quad e^{-V} \rightarrow e^{-i\Lambda} e^V e^{i\Lambda^\dagger} \quad (7.7)$$

である。このケーラーポテンシャルで与えられた系が (7.1) の系に等しいことが次のようにわかる。 $V$  で変分した方程式は

$$-\Phi^\dagger \Phi e^{-V} + \frac{1}{g^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \log(g^2 \Phi^\dagger \Phi) \quad (7.8)$$

であり、この  $V$  を代入するとケーラーポテンシャルは

$$K(\Phi, \Phi^\dagger, V) = \frac{1}{g^2} \text{tr} \log(\Phi^\dagger \Phi) + \dots \quad (7.9)$$

となる。ゲージ固定条件として軸性ゲージ条件 (7.2) を選べば、 $CP^{N-1}$  模型のケーラーポテンシャル (7.1) と一致するのである。

以上のように  $CP^{N-1}$  模型には二通りの線形化の方法があり、一つは本論文で論じた  $U(1)$  をゲージ化した斉次座標を用いた方法、もう一つは  $U(N-1)$  をゲージ化した方法で、Plücker 座標を用いた多様体の記述に対応している。

興味深いのは、この二つの線形化された模型の間に、サイバーク双対性で結びつく模型同士と同様の対応関係が指摘されていることである [22]。また、ボゾン型のグラスマニアン模型に対しても、二つの記述法の間に双対性の関係がある可能性が論じられており [43]、この事実も根拠として、論文 [22] では超対称なグラスマニアン模型における双対性の可能性について取り上げている。

本論文では、 $U(1)$  をゲージ化した模型を解析した結果、弱結合領域を記述する模型であることを明らかにした。これらを踏まえれば、 $U(N-1)$  をゲージ化した模型が強結合領域を記述する可能性があることが予想されるであろう。

容易にわかるように  $U(N-1)$  にもアノマリーがあり、これを考慮した量子化が必要である。非可換ゲージ群に対する超対称性をもつ Wess-Zumino 項は、 $U(1)$  群の場合に比べて複雑な構造をもつことが知られている [44, 45]。この Wess-Zumino 項を加えた作用を解析し、双対性が存在するかどうかを明らかにすることが重要な課題として残されている。

## 謝 辞

本研究を行うにあたり、御指導、御鞭撻を賜りました奈良女子大学 高橋智彦教授に心より感謝いたします。高橋教授は研究室配属以来、長きにわたり多くの議論を通じて、研究の進め方や考え方を熱心に教えてくださりました。また、学生生活においても数多くの苦境で温かく、力強く励まし助けていただきました。心よりお礼を申し上げます。

奈良女子大学 大木洋助教授、同志社大学 関穰慶准教授にはゼミや議論を通じて、有益な議論と助言をしていただきました。ありがとうございました。また、本論文作成に当たり、豊富な知識と経験の下、多くの適切な助言を賜りました京都大学 基礎物理学研究所 九後太一特任教授に厚く御礼申し上げます。

そして在学中には、吉岡英生教授、土射津昌久准教授、奈良女子大学素粒子論研究室の皆様には日々の学生生活の中で大変お世話になりました。深く感謝いたします。

本研究は、私が学部在学時に寺尾治彦教授（2015年11月逝去）のご指導により得た超対称性に関する知識、興味を動機として始まりました。本研究に関わるすべての知識、経験および出会いを与えてくださりました故 寺尾治彦教授に心より深く感謝いたします。

最後に、長い学生生活を温かく見守り、支えてくれた両親に感謝します。



## 付録 A

# カットオフ理論でのファイマン積分

まず、ファイマン積分を考える。

$$I = \int_{k^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + 2k \cdot p + m^2} \quad (\text{A.1})$$

ここで  $k^\mu$  と  $p^\mu$  はユークリッド運動量である。2つの運動量の積は  $k \cdot p = |k||p| \cos \theta$  で表され、 $\theta$  は2ベクトル間の角度、 $|k|$  はノルムである。 $k = |k|$ 、 $p = |p|$  と書くことで、ファイマン積分は

$$I = \frac{4\pi}{16\pi^4} \int_0^\Lambda dk k^3 \int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2 \theta}{k^2 + m^2 + 2kp \cos \theta} \quad (\text{A.2})$$

とあらわされる。ここで、4次元空間において  $d^4 k = dk d\theta 4\pi k^3 \sin^2 \theta$  であることを用いた。

さて、 $\theta$  積分は、

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2 \theta}{a + 2b \cos \theta} = \frac{\pi}{4b^2} \left( a - \sqrt{(a+2b)(a-2b)} \right) \quad (a > 2|b|, b \neq 0) \quad (\text{A.3})$$

のように実行できる。よって、 $m > p$  のとき、 $k^2 + m^2 > 2kp$  となり、ファイマン積分は次のようになる。

$$I = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\Lambda dk \frac{k}{p^2} \left\{ k^2 + m^2 - \sqrt{(k^2 + m^2 + 2kp)(k^2 + m^2 - 2kp)} \right\} \quad (\text{A.4})$$

この  $k$  積分は簡単に行え、積分結果は

$$I = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{\Lambda^4 + \Lambda^2 m^2 - \Lambda^2 p^2}{\Lambda^2 + m^2} + \frac{p^2}{2} \left( 1 - \frac{2p^2}{\Lambda^2 + m^2} \right) g(p^2, m^2) + (p^2 - m^2) h(p^2, m^2) \right\} \quad (\text{A.5})$$

となる。ここで、 $h(p^2, m^2)$  と  $g(p^2, m^2)$  は

$$g(p^2, m^2) = \frac{\Lambda^4}{2p^4} \left(1 + \frac{m^2}{\Lambda^2}\right) \left\{ 1 + \frac{m^2}{\Lambda^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{m^2}{\Lambda^2}\right)^2 - \frac{4p^2}{\Lambda^2} - \frac{2p^2}{\Lambda^2 + m^2}} \right\} \quad (\text{A.6})$$

$$h(p^2, m^2) = \log \frac{\Lambda^2 + m^2 - 2p^2 + \sqrt{(\Lambda^2 + m^2)^2 - 4\Lambda^2 p^2}}{2(m^2 - p^2)} \quad (\text{A.7})$$

によって定義される。

次に、積分の分子に運動量ベクトルを含む積分を考える。

$$\begin{aligned} \int_{k^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2k \cdot p + m^2)^2} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \int_{k^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + 2k \cdot p + m^2} \\ &= \frac{4\pi}{16\pi^4} \int_0^\Lambda dk k^3 \int_0^\pi d\theta \frac{k \sin^2 \theta \cos \theta}{(k^2 + m^2 + 2kp \cos \theta)^2} \frac{p_\mu}{p} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

ここで、公式

$$\int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{a + 2b \cos \theta} = \frac{\pi(-a^2 + 2b^2)}{8b^3} + \frac{\pi a}{8b^3} \sqrt{(a + 2b)(a - 2b)} \quad (\text{A.9})$$

を用いることで、 $\theta$  積分が実行でき、 $k$  積分の結果として次式を得る。

$$\int_{k^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{(k^2 + 2k \cdot p + m^2)^2} = \frac{p_\mu}{16\pi^2} \left\{ \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2p^2}{\Lambda^2 + m^2}\right) g(p^2, m^2) - h(p^2, m^2) \right\} \quad (\text{A.10})$$

他のファイマン積分も同様の方法で計算できる。この論文で用いたほかのファイマン積分の結果を以下に記す。

$$\int_{k^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + 2k \cdot p + m^2)^2} = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ -\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2} - \frac{p^2}{\Lambda^2 + m^2} g(p^2, m^2) + h(p^2, m^2) \right\} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} &\int_{k^2 \leq \Lambda^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2k \cdot p + m^2)^2} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left\{ \frac{\Lambda^2(\Lambda^2 + m^2 - 3p^2)}{2(\Lambda^2 + m^2)} - \frac{1}{4} \left( \Lambda^2 + m^2 + p^2 + \frac{6p^4}{\Lambda^2 + m^2} \right) g(p^2, m^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3p^2 - m^2}{2} h(p^2, m^2) \right\} \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \frac{-1}{2} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \left\{ -\frac{\Lambda^2(\Lambda^2 + 3m^2 - 3p^2)}{3(\Lambda^2 + m^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} \left( \Lambda^2 + m^2 - p^2 + \frac{(4m^2 - 6p^2)p^2}{\Lambda^2 + m^2} \right) g(p^2, m^2) - (p^2 - m^2) h(p^2, m^2) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

ここで、(A.5)、(A.10)、(A.11) そして (A.12) が矛盾していないことを、関係式

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 + 2k \cdot p + m^2} &= \delta^{\mu\nu} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2k \cdot p + m^2)^2} + 2p^\mu \frac{k_\mu}{(k^2 + 2k \cdot p + m^2)^2} \\ &\quad + m^2 \frac{1}{(k^2 + 2k \cdot p + m^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

から確認することができる。



## 参考文献

- [1] P. Fayet and J. Iliopoulos, “Spontaneously Broken Super- gauge Symmetries and Goldstone Spinors”, Phys. Lett. B **51B** (1974) 461. doi:10.1016/0370-2693(74)90310-4.
- [2] P. Fayet, “Spontaneous Supersymmetry Breaking Without Gauge Invariance,” Phys. Lett. B **58** (1975), 67 doi:10.1016/0370-2693(75)90730-3
- [3] L. O’Raifeartaigh, “Spontaneous Symmetry Breaking for Chiral Scalar Superfields,” Nucl. Phys. B **96** (1975), 331-352 doi:10.1016/0550-3213(75)90585-4.
- [4] K. I. Izawa and T. Yanagida, “Dynamical supersymmetry breaking in vector - like gauge theories,” Prog. Theor. Phys. **95** (1996), 829-830 doi:10.1143/PTP.95.829 [arXiv:hep-th/9602180 [hep-th]].
- [5] K. A. Intriligator and S. D. Thomas, “Dynamical supersymmetry breaking on quantum moduli spaces,” Nucl. Phys. B **473** (1996), 121-142 doi:10.1016/0550-3213(96)00261-1 [arXiv:hep-th/9603158 [hep-th]].
- [6] K. I. Izawa, F. Takahashi, T. T. Yanagida and K. Yonekura, “Conformal Supersymmetry Breaking in Vector-like Gauge Theories,” Phys. Rev. D **80** (2009), 085017 doi:10.1103/PhysRevD.80.085017 [arXiv:0905.1764 [hep-th]].
- [7] K. A. Intriligator and N. Seiberg, “Lectures on supersymmetric gauge theories and electric-magnetic duality,” Subnucl. Ser. **34** (1997), 237-299 doi:10.1016/0920-5632(95)00626-5 [arXiv:hep-th/9509066 [hep-th]].
- [8] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I”, Phys. Rev. **122** (1961) 345.
- [9] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II”, Phys. Rev. **124** (1961) 246.
- [10] B. Zumino, “Supersymmetry and Kahler Manifolds”, Phys. Lett. B **87** (1979), 203 doi:10.1016/0370-2693(79)90964-X.
- [11] M. Bando, T. Kuramoto, T. Maskawa and S. Uehara, “Nonlinear Realization in

- Supersymmetric Theories”, *Prog. Theor. Phys.* **72**, 313 (1984).
- [12] K. Itoh, T. Kugo and H. Kunitomo, “Supersymmetric Nonlinear Realization for Arbitrary Kahlerian Coset Space  $G/H$ ”, *Nucl. Phys. B* **263** (1986), 295-308 doi:10.1016/0550-3213(86)90118-5.
- [13] K. Itoh, T. Kugo and H. Kunitomo, “Supersymmetric Nonlinear Lagrangians of Kahlerian Coset Spaces  $G/H$ :  $G = E_6, E_7$  and  $E_8$ ”, *Prog. Theor. Phys.* **75** (1986), 386 doi:10.1143/PTP.75.386.
- [14] T. Kugo, I. Ojima and T. Yanagida, “Superpotential Symmetries and Pseudonambu-goldstone Supermultiplets”, *Phys. Lett. B* **135** (1984), 402-408 doi:10.1016/0370-2693(84)90303-4.
- [15] B. A. Ovrut and J. Wess, “Supersymmetric  $R_\xi$  Gauge and Radiative Symmetry Breaking”, *Phys. Rev. D* **25** (1982), 409 doi:10.1103/PhysRevD.25.409.
- [16] W. Lerche, “On Goldstone Fields in Supersymmetric Theories”, *Nucl. Phys. B* **238** (1984), 582-600 doi:10.1016/0550-3213(84)90336-5.
- [17] W. Lerche, “Pseudosymmetry Currents and PCAC in Supersymmetric Goldstone Theories.” *Nucl. Phys. B* **246**(1984), 475-493 doi:10.1016/0550-3213(84)90049-X.
- [18] W. Lerche, “EXTENDED ANOMALY CONSTRAINTS IN SUPERSYMMETRIC GAUGE THEORIES”, *Nucl. Phys. B* **264** (1986), 60-76 doi:10.1016/0550-3213(86)90472-4.
- [19] S. Aoyama, “The Supersymmetric  $U_{N,r}$   $\sigma$ -Model and Its  $O_2$  Extended Supersymmetry”, *Nuovo Cim. A* **57**, 176 (1980). doi:10.1007/BF02776450
- [20] U. Lindstrom and M. Rocek, “Scalar Tensor Duality and  $N=1, N=2$  Nonlinear Sigma Models”, *Nucl. Phys. B* **222**, 285 (1983).
- [21] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindstrom and M. Rocek, “Hyperkahler Metrics and Supersymmetry”, *Commun. Math. Phys.* **108**, 535 (1987).
- [22] T. Kugo, “Supersymmetric Non-linear Realization”, *Soryushiron Kenkyu (Kyoto)* **95** (1997) C56; SCGT96 Proceedings (World scientific, 1996), ed. by J. Nishimura and K. Yamawaki, available in <http://ekenwww.phys.nagoya-u.ac.jp/Scgt/proc/>.
- [23] K. Higashijima and M. Nitta, “Supersymmetric nonlinear sigma models as gauge theories”, *Prog. Theor. Phys.* **103**, 635 (2000).
- [24] P. Di Vecchia and S. Ferrara, “Classical Solutions in Two-Dimensional Supersymmetric Field Theories”, *Nucl. Phys. B* **130** (1977), 93-104 doi:10.1016/0550-3213(77)90394-7.
- [25] E. Witten, “A Supersymmetric Form of the Nonlinear Sigma Model in Two-

- Dimensions”, *Phys. Rev. D* **16** (1977), 2991 doi:10.1103/PhysRevD.16.2991.
- [26] E. Witten, “Instantons, the Quark Model, and the  $1/n$  Expansion”, *Nucl. Phys. B* **149** (1979), 285-320 doi:10.1016/0550-3213(79)90243-8.
- [27] A. D’Adda, P. Di Vecchia and M. Luscher, “Confinement and Chiral Symmetry Breaking in  $CP^{n-1}$  Models with Quarks”, *Nucl. Phys. B* **152** (1979), 125-144 doi:10.1016/0550-3213(79)90083-X.
- [28] L. Faddeev and S. L. Shatashvili, “Realization of the Schwinger Term in the Gauss Law and the Possibility of Correct Quantization of a Theory with Anomalies”, *Phys. Lett. B* **167** (1986), 225-228 doi:10.1016/0370-2693(86)90604-0.
- [29] K. Harada and I. Tsutsui, “On the Path Integral Quantization of Anomalous Gauge Theories,” *Phys. Lett. B* **183** (1987), 311-314 doi:10.1016/0370-2693(87)90970-1
- [30] A. Kondo and T. Takahashi, “Supersymmetric nonlinear sigma models as anomalous gauge theories,” *Phys. Rev. D* **102** (2020) no.2, 025014 doi:10.1103/PhysRevD.102.025014 [arXiv:1912.12034 [hep-th]].
- [31] B. de Wit and M. T. Grisaru, “Compensating fields and anomalies”, in *Quantum Field Theory and Quantum Statistics, Vol. 2*, I. A. Batalin, C. J. Isham and G. A. Vilkovisky (Eds.) Adam Hilger, Bristol, 1987.
- [32] Y. Cheng, Y. M. Dai, G. Faisel and O. C. W. Kong, “Analysis on a Nambu–Jona-Lasinio Model of Dynamical Supersymmetry Breaking,” [arXiv:1603.00724 [hep-th]].
- [33] T. Kugo, “Spontaneous Supersymmetry Breaking, Negative Metric and Vacuum Energy”, [arXiv:1703.00600 [hep-th]].
- [34] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and Supergravity”, Princeton Series in Physics, (1992).
- [35] S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields, Volume II Modern Applications”, Cambridge University Press,(2005), Sec. 22.
- [36] M. Bando, T. Kugo and K. Yamawaki, “Nonlinear Realization and Hidden Local Symmetries”, *Phys. Rept.* **164**, 217(1988).
- [37] 九後 汰一郎, “ゲージ場の量子論 I,II”, 培風館 (1990).
- [38] K. Higashijima and M. Nitta, “Quantum equivalence of auxiliary field methods in supersymmetric theories, “*Prog. Theor. Phys.* **103**, 833 (2000).
- [39] K. i. Konishi and K. i. Shizuya, “Functional Integral Approach to Chiral Anomalies in Supersymmetric Gauge Theories,” *Nuovo Cim. A* **90** (1985), 111 doi:10.1007/BF02724227

- [40] T. E. Clark, O. Piguet and K. Sibold, “Absence of radiative corrections to the axial current anomaly”, Nucl.Phys.B159(1979),1.
- [41] T. Hamazaki and T. Kugo, “Defining the Nambu-Jona-Lasinio model by higher derivative kinetic term,” Prog. Theor. Phys. **92** (1994), 645-668 doi:10.1143/PTP.92.645 [arXiv:hep-ph/9405375 [hep-ph]].
- [42] Y. Cheng, Y. M. Dai, G. Faisel and O. C. W. Kong, “A Simple Model of Dynamical Supersymmetry Breaking with the Generation of Soft Mass(es),” [arXiv:1507.01514 [hep-ph]].
- [43] M. Bando, Y. Taniguchi and S. Tanimura, “Dynamical gauge boson and strong - weak reciprocity,” Prog. Theor. Phys. **97** (1997), 665-678 doi:10.1143/PTP.97.665 [arXiv:hep-th/9610244 [hep-th]].
- [44] G. Girardi, R. Grimm and R. Stora, “Chiral Anomalies in  $N = 1$  Supersymmetric Yang-Mills Theories”, Phys. Lett. B **156** (1985), 203-208 doi:10.1016/0370-2693(85)91510-2.
- [45] G. A. Girardi and R. Grimm, “Algebraic description of chiral anomalies and superspace geometry”, Nucl. Phys. B **912** (2016), 224-237 doi:10.1016/j.nuclphysb.2016.06.015.