主双対内点法に現れる直交行列

角　田　秀　一　郎*

1　はじめに

通常、双対内点法において射影行列が重要な役割を果たす。この論文では、その射影行列を表す直交行列を構成する。直交行列が内点のみならず境界でも定義されることをみる。出発点は次の標準的線形計画問題とその双対である。ベクトル、行列を使って

最小化	(c, x)	最大化	(b, y)
条　件	$Ax = b$	条　件	$z + {}^tAy = c$
	$x \geq 0$		$z \geq 0$

と書く。通常の記載同様 A は行列、x 等の小文字はベクトルを表す。また初期実行可能解として $x = e$、$z = e$、$y = y_0$ がよく使われる（e は全ての成分が 1 のベクトルである）。A の階数は最大と仮定する。これで一般性を失うことはない。

2　解の改善

当然、解法によってそれぞれで違いはあるが問題を

$$AXe = b, \quad XZe + {}^t(AX)y = Xc$$

あるいは

$$A(XZ^{-1})^{1/2}(XZ)^{1/2}e = b, \quad (XZ)^{1/2}e + {}^t(A(XZ^{-1})^{1/2})y = (XZ^{-1})^{1/2}c$$

などと書き直す（ここで、X（Z）は対角に x（z）の成分を並べた行列であり、e は全ての成分が 1 のベクトルである）。ここから次のような射影行列を使い実行可能解を改善していく。

$$I - {}^t(AX)(AX{}^t(AX))^{-1}AX$$
$${}^t(AX)(AX{}^t(AX))^{-1}AX$$

* 複合現象科学専攻　複合自然構造講座

あるいは

$$I - {}^t(AX^{1/2}Z^{-1/2})(AX^{1/2}Z^{-1/2}\,{}^t(AX^{1/2}Z^{-1/2}))^{-1}AX^{1/2}Z^{-1/2}$$
$${}^t(AX^{1/2}Z^{-1/2})(AX^{1/2}Z^{-1/2}\,{}^t(AX^{1/2}Z^{-1/2}))^{-1}AX^{1/2}Z^{-1/2}$$

などである。解法によっては異なる行列が使われることもあることを注意しておく。これらの行列を踏まえ、さらに一般性を担保するため、W、V を成分正の対角行列として

$$WAV$$

とそれに伴う射影行列

$$I - {}^t(WAV)(WAV\,{}^t(WAV))^{-1}WAV$$
$${}^t(WAV)(WAV\,{}^t(WAV))^{-1}WAV$$

を解析することとする。

3　行列変形

まず簡単のため $A = (K\ KB)$（K は正則行列）とする。この表記に合わせ

$$V = \begin{pmatrix} T & O \\ O & S \end{pmatrix}$$

と分解表記すると

$$WAV = (WKT\ WKBS)$$

が得られる。ここで WKT は正則行列である。

命題 3.1 上の条件の下、

$$\begin{aligned} &{}^t(WAV)(WAV\,{}^t(WAV))^{-1}WAV \\ &= \begin{pmatrix} I \\ {}^t(T^{-1}BS) \end{pmatrix} (I + T^{-1}BS\,{}^t(T^{-1}BS))^{-1}(I\ \ T^{-1}BS) \end{aligned}$$

となる。

証明

まず、

$$\begin{aligned} &WAV\,{}^t(WAV) \\ &= WKT\,{}^t(WKT) + WKBS\,{}^t(WKBS) \\ &= WKT(I + (WKT)^{-1}WKBS\,{}^t(WKBS)({}^t(WKT))^{-1})\,{}^t(WKT) \end{aligned}$$

と変形する。これを ${}^t(WAV)(WAV\,{}^t(WAV))^{-1}WAV$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
&{}^t(WAV)(WAV\,{}^t(WAV))^{-1}WAV\\
&=\begin{pmatrix} I \\ {}^t(WKBS){}^t(WKT)^{-1} \end{pmatrix}(I+T^{-1}BS^2\,{}^tB\,{}^tT^{-1})^{-1}(I\ \ (WKT)^{-1}WKBS)\\
&=\begin{pmatrix} I \\ {}^t((WKT)^{-1}WKBS) \end{pmatrix}(I+T^{-1}BS^2\,{}^tB\,{}^tT^{-1})^{-1}(I\ \ (WKT)^{-1}WKBS)\\
&=\begin{pmatrix} I \\ {}^t(T^{-1}BS) \end{pmatrix}(I+T^{-1}BS\,{}^t(T^{-1}BS))^{-1}(I\ \ T^{-1}BS)
\end{aligned}
$$

となり、証明終了である。

ここで注意したいのは、この行列には W、K が含まれていないことである。証明の最後の式に注目して次の命題を得る。既知の式かもしれないが、証明しておく。

命題 3.2 C を（正方とは限らない）行列とすると

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} I \\ {}^tC \end{pmatrix}(I+C\,{}^tC)^{-1}(I\ C)\\
&=\begin{pmatrix} (I+C\,{}^tC)^{-1} & O \\ O & (I+\,{}^tCC)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & C \\ {}^tC & {}^tCC \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。

証明

次の式変形

$$
\begin{aligned}
&{}^tC(I+C\,{}^tC)^{-1}\\
&=(I+\,{}^tCC)^{-1}(I+\,{}^tCC)\,{}^tC(I+C\,{}^tC)^{-1}\\
&=(I+\,{}^tCC)^{-1}\,{}^tC(I+C\,{}^tC)(I+C\,{}^tC)^{-1}\\
&=(I+\,{}^tCC)^{-1}\,{}^tC
\end{aligned}
$$

により、命題の式は自然としたがう。証明終了

命題 3.1 と 3.2 により次の定理が成り立つ。

定理 3.3 上の記法のもと、$C=T^{-1}BS$ と代入すると

$$
\begin{aligned}
&{}^t(WAV)(WAV\,{}^t(WAV))^{-1}WAV\\
&=\begin{pmatrix} (I+C\,{}^tC)^{-1} & O \\ O & (I+\,{}^tCC)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & C \\ {}^tC & {}^tCC \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

系 3.4 上の仮定のもと

$$
\begin{aligned}
&I-{}^t(WAV)(WAV\,{}^t(WAV))^{-1}WAV\\
&=\begin{pmatrix} (I+C\,{}^tC)^{-1} & O \\ O & (I+\,{}^tCC)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\,{}^tC & -C \\ -{}^tC & I \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と書ける。

4　直交行列

この節では、前節の C を使い直交行列を定義する。C は最終的には線型計画問題に由来していることに留意する。さて、対称行列

$$\begin{pmatrix} I & C \\ {}^tC & -I \end{pmatrix}$$

を考える。直接的計算により

命題 4.1 等式

$$\begin{pmatrix} I & C \\ {}^tC & -I \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (I + C\,{}^tC) & O \\ O & (I + {}^tCC) \end{pmatrix}$$

を得る。これと命題 3.2 とその証明を合わせて次の定理を得る。

定理 4.2 行列

$$\begin{pmatrix} (I + C\,{}^tC)^{-1/2} & O \\ O & (I + {}^tCC)^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & C \\ {}^tC & -I \end{pmatrix}$$

は対称直交行列である。

いままでの議論によれば証明は不要だろう。直交行列全体は有界閉集合であるので、実行可能領域の境界においても上の直交行列は延長される（ユニークネスはない)。今の所、この直交行列を使った、従前の解法よりも優れた解法を構成できているわけではないが、この直交行列の解析が進むことで、特に実数体上の新しい解法が期待される。

参考文献

[1] Yuko SAEKI．Exact Solution on Linear Program，奈良女子大学人間文化研究科年報，2002

[2] Shuichiro TSUNODA． Normative Function and Regular Metrics， プレプリント

[3] 小島政和他． 内点法， 朝倉書店，2001

Orthogonal matrices in a primal-dual method of linear program

TSUNODA Shuichiro

In this paper, we consider orthogonal matrices appearing in a primal-dual method (or algorithm) of linear program. The program is important from theoretical and practical aspects after simplex and Karmarkar methods. In the simplex method, we make a better feasible solution choosing several rows of a given matrix. In the Karmarkar method, we use a projection matrix to improve a feasible solution. The primal-dual method clarifies a meaning of Karmarkar's projection matrix and then rewrites the matrix in terms of primal and dual linear programs. In the primal-dual method, we have two projection matrices which play important roles. Karmarkar method uses a single projection matrix in each step.

Projection matrices in both Karmarkar method and primal-dual method are related to generalized inverse matrices. We analyze those matrices and have several properties concerning projection matrices in primal-dual method. The properties include relevant factors to compute the projection matries. In particular, we have new computational method of the projection matrices, which makes a computation of a feasible solution easy. Furthermore, we have a single orthogonal matrix derived from two projection matrices. We do not yet have new method of linear program using our orthogonal matrix. But we hope that future research of the orthogonal matrix induces a new method.